

Schnitte Boolescher Korrespondenzen und ihre Dualisierungen

von
Siegfried Graf
aus
Wuppertal

1973 № 455

Schnitte Boolescher Korrespondenzen und ihre Dualisierungen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Siegfried Graf

aus

Wuppertal

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:	26. November 1973
Dekan:	Professor Dr. J. Christiansen
Erstberichterstatter:	Professor Dr. D. Kölzow
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. H. Bauer

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
§ 0 Vorbereitungen	8
a) Bezeichnungen	8
b) Korrespondenzen	9
c) Boolesche Algebren und Räume	12
d) Maßräume	20
Teil I AUSDEHNUNG DER STONESCHEN DUALITÄTSTHEORIE AUF BOOLESCHES KORRESPONDENZEN	21
§ 1 σ -Homomorphismen und α -Homomorphismen als Dualisierungen Boolescher Korrespondenzen	21
a) σ - und α -Homomorphismen	22
b) Boolesche Korrespondenzen	25
c) Der Dualitätssatz	29
d) Boolesche Homomorphismen und ihre Dualisierung	35
§ 2 Ein Existenzsatz für stetige Schnitte Boole- scher Korrespondenzen und seine Dualisierungen	37
Teil II ANWENDUNGEN AUF FORTSETZUNGS- UND LIFTING- PROBLEME BEI BOOLESCHEN ALGEBREN UND RÄUMEN	45
§ 3 Verallgemeinerung der VON NEUMANN-STONESchen Liftingsätze	45
§ 4 Ein Existenzsatz für untere Dichten von end- lichen Maßen und ein neuer Beweis des Lifting- satzes für vollständige endliche Maße	60
§ 5 Ein Satzsatz von HASUMI und ein Spezialfall eines Satzsatzes von MICHAEL	73
§ 6 Liftung stetiger Abbildungen und GLEASONS Charakterisierung der projektiven kompakten Räume	77
Anhang zu § 6: Eine Verschärfung des Fortset- zungssatzes von SIKORSKI	80

Teil III	KATEGORIE-MAßRÄUME UND HYPERSTONESISCHE RÄUME	82
§ 7	Charakterisierung der Maßräume, die sich zu Kategorie-Maßräumen machen lassen	82
§ 8	Charakterisierung der topologischen Räume, die ein Kategoriemaß zulassen	96
§ 9	Eine topologische Charakterisierung der hyperstoneschen Räume	114
Anhang:	Dualisierungen stetiger Korrespondenzen zwischen kompakten Räumen	120
Literaturverzeichnis		122

Einleitung

Ein fundamentaler Satz von M.H. STONE besagt, daß eine bijektive Beziehung zwischen der Klasse der Booleschen Algebren und derjenigen der Booleschen Räume besteht. Dabei wird jeder Booleschen Algebra $\mathcal{A}$ ein Boolescher Raum $X(\mathcal{A})$ so zugeordnet, daß $\mathcal{A}$ isomorph ist zur Algebra der zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen in $X(\mathcal{A})$. In dieser Stoneschen Dualitätstheorie für Boolesche Algebren entspricht außerdem einem Booleschen Homomorphismus zwischen zwei Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genau eine stetige Abbildung von $X(\mathcal{B})$ nach $X(\mathcal{A})$ und umgekehrt.

HALMOS [6] und WRIGHT [23] haben diese Dualisierungen auf $\cup$ -Homomorphismen ausgedehnt: Den $\cup$ -Homomorphismen entsprechen dual genau die punktabgeschlossenen, stetigen mehrdeutigen "Abbildungen" zwischen Booleschen Räumen - in dieser Arbeit kurz Boolesche Korrespondenzen genannt - und umgekehrt. In der Menge $BK(X, Y)$ der Booleschen Korrespondenzen zwischen den Räumen X und Y und in der Menge $VH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ der $\cup$ -Homomorphismen zwischen den Booleschen Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind in natürlicher Weise Ordnungsrelationen erklärt. Es wird gezeigt, daß die von HALMOS und WRIGHT definierte Bijektion von $VH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ nach $BK(X(\mathcal{B}), X(\mathcal{A}))$ ein Ordnungsisomorphismus ist, daß die Booleschen Homomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ genau die minimalen Elemente in $VH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind und daß die stetigen Abbildungen von $X(\mathcal{B})$ nach $X(\mathcal{A})$ genau die minimalen Elemente in $BK(X(\mathcal{B}), X(\mathcal{A}))$ sind. Außerdem stellt sich heraus, daß die Beschränkung dieses Ordnungsisomorphismus auf die Booleschen Homomorphismen gerade die bekannte Stonesche Bijektion zwischen Booleschen Homomorphismen und stetigen Abbildungen liefert.

Die Charakterisierung der stetigen Abbildungen als minimale Boolesche Korrespondenzen erweist sich als sehr nützlich bei der Konstruktion von stetigen Schnitten für Boolesche Korrespondenzen durch sukzessive Verkleinerung. Es gilt folgender Satz:

Sei F eine Boolesche Korrespondenz von X nach Y , für die ein punktettrennendes System $\mathcal{T}$ von zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen in Y existiert, so daß für jede Kardinalzahl κ mit $\kappa < \text{card}(\{A \in \mathcal{T}: F^{-1}(A) \cap F^{-1}(\bigcap A) \neq \emptyset\})$, für alle $A \in \mathcal{T}$ und für jede Menge $K \subset F^{-1}(A) \cap F^{-1}(\bigcap A)$, die Durchschnitt von höchstens κ zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen ist, auch das Innere $\overset{\circ}{K}$ von K abgeschlossen ist.

Dann gibt es einen stetigen Schnitt für F .

Dual zum Begriff des stetigen Schnittes einer Booleschen Korrespondenz wird der Begriff der Verschärfung eines $\cup$ -Homomorphismus eingeführt. Für die Existenz einer Verschärfung eines $\cup$ -Homomorphismus erhält man dann ein zum zitierten Satz duales Resultat. - Schließlich sei noch erwähnt, daß alle bisher angestellten Überlegungen richtig bleiben, wenn an die Stelle von $\cup$ -Homomorphismen $\cap$ -Homomorphismen treten.

Wie der zweite Teil dieser Arbeit zeigt, liegt die Bedeutung des oben formulierten Satzes und seiner Dualisierungen für $\cup$ - und $\cap$ -Homomorphismen in ihren Anwendungsmöglichkeiten auf Schnitt-, Lifting- und Fortsetzungsprobleme bei Booleschen Algebren und kompakten Räumen. Zahlreiche Resultate, die zwar im wesentlichen schon bekannt waren, aber oft beziehungslos nebeneinander standen, lassen sich direkt

folgern und erscheinen so in einem neuen Zusammenhang. Im einzelnen handelt es sich um:

einen Liftingsatz für Boolesche Algebren, wie er - bis auf eine leichte Verallgemeinerung - von STONE und VON NEUMANN in [17] bewiesen wird:

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Boolesche Algebren, ist weiter κ ein für alle $\kappa < \text{card}(\mathcal{B})$ bedingt κ -vollständiges Ideal in $\mathcal{A}$ und $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\kappa$ die Quotientenabbildung, so existiert genau dann für einen Booleschen Homomorphismus $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}/\kappa$ ein Boolescher Homomorphismus $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ mit $\pi \circ \psi = \varphi$, wenn es einen $\cup$ -Homomorphismus $\chi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ mit dieser Eigenschaft gibt.

den Existenzsatz für ein Bairesches Lifting (vgl. [5]):

In jedem topologischen Raum von 2. Kategorie existiert ein Lifting der G -Algebra der Mengen mit Bairescher Eigenschaft bezüglich des Ideals der Mengen von 1. Kategorie.

einen Schnittsatz von HASUMI (vgl. [9]):

Jede unterhalb-stetige Korrespondenz von einem extrem-unzusammenhängenden kompakten Raum in einen kompakten Raum besitzt einen stetigen Schnitt.

einen Spezialfall eines MICHAELSchen Schnittsatzes (vgl. [16]):

Jede Boolesche Korrespondenz von einem Booleschen Raum in einen metrisierbaren Booleschen Raum besitzt einen stetigen Schnitt.

die schwierigere Richtung von GLEASONS Charakterisierung der projektiven kompakten Räume (vgl. [4]):

Jeder extrem-unzusammenhängende kompakte Raum ist projektiv.

den Fortsetzungssatz von SIKORSKI (vgl. [22]):

Ein Boolescher Homomorphismus von einer Unter-
algebra einer Booleschen Algebra $\mathcal{A}$ in eine
vollständige Boolesche Algebra $\mathcal{L}$ läßt sich zu
einem Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{L}$ fortsetzen.

Von all diesen Sätzen wird - falls sinnvoll - auch
die duale Aussage formuliert. Daneben werden folgen-
de verwandte Lifting- und Fortsetzungsaussagen bewie-
sen, auch wenn sie keine unmittelbaren Folgerungen
aus der im ersten Teil der Arbeit entwickelten
Theorie sind:

eine Verallgemeinerung eines anderen VON NEUMANN -
STONEschen Liftingsatzes für Boolesche Algebren
(vgl. [17]):

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ Boolesche Algebren, ist $\mathfrak{u}$ ein für
jedes $\kappa < \text{card}(\mathcal{L})$ κ -vollständiges Ideal in $\mathcal{A}$
und $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{u}$ die Quotientenabbildung, so
gibt es zu jedem Booleschen Homomorphismus
 $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{u}$ einen Booleschen Homomorphismus
 $\psi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ mit $\pi \circ \psi = \varphi$.

eine Verschärfung des Fortsetzungssatzes von
SIKORSKI:

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ Boolesche Algebren, so daß $\mathcal{L}$ für
jede Kardinalzahl $\kappa \leq \text{card}(\mathcal{A})$ κ -vollständig ist,
so läßt sich jeder Boolesche Homomorphismus von
einer Unter- algebra von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{L}$ zu einem Homo-
morphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{L}$ fortsetzen.

eine Modifikation des Liftingsatzes der Maßtheorie:

Jeder endliche Maßraum besitzt eine untere Dichte.

Aus diesem letzten Satz folgt auf Grund des ersten VON NEUMANN - STONESchen Liftingsatzes sofort der Liftingsatz der Maßtheorie (vgl. [15]):

Jeder vollständige endliche Maßraum besitzt ein Lifting.

Den Ausgangspunkt für die Untersuchungen im dritten Teil dieser Arbeit bildeten die Liftingtopologien der Maßtheorie. Es ist eine bekannte Tatsache (vgl. OXTOBY [18]), daß ein Lifting in einem vollständigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eine Topologie induziert, für die die Mengen mit Bairescher Eigenschaft gerade die lokal-meßbaren Mengen und die Mengen von 1. Kategorie gerade die lokalen Nullmengen sind. Das zu μ gehörende wesentliche Maß erweist sich bezüglich dieser Topologie als Kategoriemaß, das heißt als ein Maß, das auf den Mengen mit Bairescher Eigenschaft definiert ist und genau auf den Mengen 1. Kategorie verschwindet. - Die im zweiten Teil der Arbeit bewiesene Existenz eines Baireschen Liftings hat zur Folge, daß umgekehrt ein Maßraum, in dem eine Topologie mit den oben beschriebenen Eigenschaften existiert, ein Lifting besitzt. Diese Ergebnisse lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Ein vollständiger Maßraum besitzt genau dann ein Lifting, wenn der zugehörige wesentliche Maßraum ein Kategorie-Maßraum ist.

Es erhebt sich nun die Frage, welche Topologien ein

nicht-triviales bzw. wesentliches Kategoriemaß zu-
lassen. Dieses Problem wird auf das der Charakteri-
sierung der Baireschen topologischen Räume reduziert,
für die ein endliches Kategoriemaß existiert. Im
Spezialfall von Hausdorff-Topologien mit abzählbarer
Basis gelingt es mit Hilfe eines Satzes von HORN und
TARSKI [10] über separable Boolesche Algebren, diese
Räume vollständig zu beschreiben:

Ein Hausdorff-Raum X mit abzählbarer Basis der
Topologie läßt genau dann ein endliches Katego-
riemaß zu, wenn die Menge der isolierten Punkte
von X in X dicht liegt.

Ein analoges Resultat für metrisierbare Räume hat
OXTOBY schon in [19] angegeben.

Im allgemeinen Fall erhält man vermöge KELLEYS Cha-
rakterisierung der endlichen Maßalgebren (vgl. [13])
folgenden Satz:

Ein Bairescher topologischer Raum X läßt genau
dann ein endliches Kategoriemaß zu, wenn die
Boolesche Algebra der in X regulär offenen Men-
gen schwach-abzählbar-distributiv ist und die
Topologie σ von X folgende Eigenschaft (*) hat:
 $\sigma \setminus \{\emptyset\}$ ist Vereinigung einer Folge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von
Teilmengen von σ , derart daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 < \inf \left\{ \frac{1}{m} \sup \sum_{i=1}^m 1_{U_i} : m \in \mathbb{N}; U_1, \dots, U_m \in \sigma_n \right\}.$$

Für lokal-kompakte Räume läßt sich dieses Ergebnis
mittels eines Satzes von KELLEY bzw. OXTOBY (vgl.
etwa [19]) noch wie folgt vereinfachen:

Ein lokal-kompakter Raum läßt genau dann ein

endliches Kategoriemaß zu, wenn seine Topologie die Bedingung (*) erfüllt und in ihm jede Menge von 1. Kategorie nirgends dicht ist.

Daraus ergibt sich eine topologische Charakterisierung der hyperstoneschen Räume (die bekanntlich mit den Spektren der kommutativen W^* -Algebren mit Eins-
element identisch sind). Nach DIXMIER [2] ist nämlich ein extrem-unzusammenhängender kompakter Raum genau dann hyperstonesch, wenn er ein wesentliches Kategoriemaß zuläßt. Auf Grund der vorangehenden Überlegungen gilt deshalb:

Ein kompakter Raum X ist genau dann hyperstonesch, wenn X extrem-unzusammenhängend ist, in X jede Menge 1. Kategorie nirgends dicht ist und schließlich in X eine Familie paarweise disjunkter offener Mengen existiert, deren Vereinigung in X dicht liegt und deren Relativtopologie jeweils die Bedingung (*) erfüllt.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor D. Kölzow, danke ich herzlich für viele nützliche Gespräche, in denen diese Arbeit entscheidend gefördert wurde.

§ 0. Vorbereitungen

a) Bezeichnungen

Es bezeichne N die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$,
 R den Körper der reellen Zahlen mit der üblichen Topologie und Ordnung, $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ die erweiterte Zahlen-
gerade, R_+ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen
und $\bar{R}_+$ die Menge $R_+ \cup \{+\infty\}$.

Die Restriktion einer Abbildung $f: A \rightarrow B$ auf eine Teil-
menge $A' \subset A$ wird mit $f|_{A'}$ bezeichnet.

Es sei id_A die identische Abbildung von A , und für $A' \subset A$
sei $1_{A'}: A' \rightarrow R$ definiert durch

$$1_{A'}(x) = \begin{cases} 0, & x \in X \setminus A' \\ 1, & x \in A' \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von A' .

Ist $B' \subset B$, $j: B' \rightarrow B$ die kanonische Inklusion und
 $f: A \rightarrow B'$ eine Abbildung, so wird die Abbildung $j \circ f$
von A nach B auch wieder mit f bezeichnet. Die Menge
aller Abbildungen von A nach B' wird so in kanonischer
Weise als Teilmenge der Menge aller Abbildungen von
 A nach B aufgefaßt.

Unter einer Folge von Elementen einer Menge A wird eine
Abbildung von N nach A verstanden. Folgen werden in der
Form $(a_n)_{n \in N}$ geschrieben.

Sind f und g zwei Abbildungen von einer Menge A nach $\bar{R}$,
so sei

$$\{f < g\} := \{x \in A: f(x) < g(x)\},$$

$$\{f = g\} := \{x \in A: f(x) = g(x)\}$$

und

$$\{f \leq g\} := \{x \in A: f(x) \leq g(x)\}.$$

Konstante Abbildungen nach $\bar{R}$ werden oft einfach durch
ihren Bildwert bezeichnet.

Für eine Menge A sei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge, d.h. das System aller Teilmengen von A , $\text{card}(A)$ die Mächtigkeit von A und $\Omega(A)$ die kleinste Ordinalzahl mit

$$\text{card}(A) = \text{card}(\Omega(A)).$$

Mit $\aleph, \aleph', \aleph'', \dots$ werden im folgenden Kardinalzahlen bezeichnet, während $\omega, \omega', \omega'', \dots$ für Ordinalzahlen stehen. $\leq$ und $<$ soll unter anderem auch die übliche Ordnung von Kardinal- und Ordinalzahlen bezeichnen.

$$\aleph := \text{card}(\mathbb{N})$$

Die Begriffe "abzählbar" und "höchstens abzählbar" stehen synonym für "gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ ".

Im übrigen werden die allgemein gebräuchlichen Symbole, Definitionen und Sätze der Mengentheorie ohne nähere Erläuterung verwendet.

Für einen topologischen Raum X sei $\mathcal{F}(X)$ das System der abgeschlossenen Mengen und $\mathcal{O}(X)$ das System der offenen Mengen in X .

Für $A \subset X$ werde mit $\bar{A}$ der Abschluß und mit $\overset{\circ}{A}$ das Innere von A bezeichnet.

Unter einem kompakten bzw. lokal-kompakten Raum ist stets ein Hausdorffscher kompakter bzw. lokal-kompakter Raum zu verstehen.

Die elementaren Grundbegriffe der Topologie werden als bekannt vorausgesetzt.

b) Korrespondenzen

0. 1 Definition:

Seien X und Y beliebige Mengen.

Eine Korrespondenz F von X nach Y ist eine Abbildung $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ mit $F(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$.

0. 2 Bemerkung:

Jeder Korrespondenz F von X nach Y ist in eineindeutiger Weise die linkstotale Relation $\tilde{F} := \{(x,y) \in X \times Y: y \in F(x)\}$ zugeordnet, und umgekehrt entspricht jeder linkstotalen Relation $R \subset X \times Y$ (d.h. jeder Relation $R \subset X \times Y$ mit $X = \bigcup_{y \in Y} \{x \in X: (x,y) \in R\}$) genau eine Korrespondenz $\tilde{R}$ von X nach Y , nämlich $\tilde{R}: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ mit $\tilde{R}(x) = \{y \in Y: (x,y) \in R\}$. Es gilt natürlich $\tilde{\tilde{R}} = R$ und $\tilde{\tilde{F}} = F$.

Da die Unterscheidung zwischen linkstotalen Relationen und Korrespondenzen für die folgenden Betrachtungen unerheblich ist, soll jede Korrespondenz F mit der zugehörigen linkstotalen Relation $\tilde{F}$ identifiziert werden, und umgekehrt soll jede linkstotale Relation R mit der zugehörigen Korrespondenz $\tilde{R}$ identifiziert werden. Bei dieser Identifikation entsprechen den Funktionen von X nach Y genau die Korrespondenzen F von X nach Y , für die $F(x)$ für alle $x \in X$ einelementig ist.

Die Menge der linkstotalen Relationen (und damit auch die der Korrespondenzen) wird durch die mengentheoretische Inklusion kanonisch geordnet.

0. 3 Definition:

Sei $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ eine Korrespondenz.

Für $Q \subset X$ sei $F(Q) := \bigcup_{x \in Q} F(x)$ das Bild von Q unter F .

Ist $x \in X$ mit $F(x)$ einelementig, so werde auch das Element von $F(x)$ wieder mit $F(x)$ bezeichnet.

Für $S \subset Y$ sei $F^{-1}(S) := \bigcup_{y \in S} \{x \in X: y \in F(x)\} = \{x \in X: F(x) \cap S \neq \emptyset\}$ das Urbild von S unter F .

Für $y \in Y$ sei $F^{-1}(y) := F^{-1}(\{y\})$ das Urbild des Punktes y unter F .

Ist Z eine weitere Menge und $G: Y \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ eine weitere Korrespondenz, so sei $G \circ F: X \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ definiert durch

$$G \circ F(x) = \bigcup_{y \in F(x)} \{z \in Z: z \in G(y)\}$$

die Hintereinanderausführung von G und F.

0. 4 Bemerkung:

Die oben eingeführten Begriffsbildungen sind für Relationen wohlbekannt. - Es ist außerdem klar, daß die Hintereinanderausführung zweier Korrespondenzen wieder eine Korrespondenz ist und daß die Hintereinanderausführung von Korrespondenzen eine assoziative Operation ist.

Auf Grund der Identifizierung lassen sich auch andere für Relationen definierte Begriffe auf Korrespondenzen anwenden.

0. 5 Definition:

Seien X und Y topologische Räume und $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ eine Korrespondenz.

- (i) F heißt unterhalb-stetig, falls für jede offene Menge $U \subset Y$ auch $F^{-1}(U)$ offen ist.
- (ii) F heißt oberhalb-stetig, falls für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ auch $F^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.
- (iii) F heißt stetig, falls F ober- und unterhalb-stetig ist.
- (iv) F heißt punktabgeschlossen, falls für alle $x \in X$ die Menge $F(x)$ abgeschlossen ist.

0. 6 Bemerkung:

- (i) Ist F eine punktabgeschlossene Korrespondenz von einem Raum X in einen topologischen Raum Y , so kann F als Abbildung von X in das System $\mathcal{F}(Y)$ der abgeschlossenen Mengen von Y aufgefaßt werden.
- (ii) In jedem Fall kann $\mathcal{F}(Y)$ so mit einer Topologie versehen werden, daß der oben definierte Stetigkeitsbegriff für F gerade der gewöhnliche für die Funktion $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ ist.

O. 7 Definition:

Für topologische Räume X und Y werde mit $OK(X,Y)$ die Menge der oberhalb-stetigen, punktabgeschlossenen Korrespondenzen von X nach Y bezeichnet.

Sind $F, G \in OK(X,Y)$, so sei $F \leq G$ gleichbedeutend mit $F(x) \subset G(x)$ für alle $x \in X$.

Faßt man F und G als Relationen auf, so ist dies zu $F \subset G$ äquivalent.

c) Boolesche Algebren und Räume

In diesem Abschnitt sollen einige, für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtige Resultate und Definitionen aus der Theorie der Booleschen Räume und Algebren zusammengestellt werden. Alle in dieser Arbeit verwendeten und hier nicht explizit aufgeführten Symbole, Definitionen und Ergebnisse sind in SIKORSKI [21] zu finden.

O. 8 Definition:

Für eine Boolesche Algebra $\mathcal{A}$ und $A, B \in \mathcal{A}$ werde mit $A \cap B$ der Boolesche Durchschnitt, mit $A \cup B$ die Boolesche Vereinigung, mit $\bar{A}$ das Boolesche Komplement von A , mit $A \setminus B := A \cap \bar{B}$ das relative Boolesche Komplement von B bezüglich A , mit $\leq$ die kanonische Ordnung und mit 0 das kleinste sowie mit 1 das größte Element bezüglich dieser Ordnung bezeichnet.

Ist $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra von Teilmengen einer Menge X bezüglich der üblichen mengentheoretischen Operationen (kurz Mengenalgebra genannt), so ist die leere Menge $\emptyset$ das kleinste und die Menge X das größte Element in $\mathcal{A}$ (bezüglich der kanonischen Ordnung).

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ stets eine Boolesche Algebra.

0.9 Definition:

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathcal{A}$.

Falls es existiert, wird mit $\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$ das Supremum der Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{A}$ bezeichnet, das ist dasjenige Element $A \in \mathcal{A}$, für das gilt:

- (i) Für alle $i \in I$ ist $A_i \subset A$.
- (ii) Ist $A' \in \mathcal{A}$ und für alle $i \in I$ $A_i \subset A'$,
so ist $A \subset A'$.

Analog wird mit $\bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$, falls es existiert, das Infimum der Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{A}$ bezeichnet.

0.10 Bemerkung:

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{A}$.

Dann gilt:

- (i) $A \cap \bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i = \bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} (A \cap A_i)$
- (ii) $A \cup \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i = \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} (A \cup A_i)$
- (iii) $\bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i = \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} \{A_i\}$

Die Gleichungen sind dabei so zu verstehen, daß die Infima bzw. Suprema auf der rechten Seite existieren, wenn $\bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$ existiert, und natürlich die Gleichheit besteht.

Analoge Rechenregeln gelten für $\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$.

0.11 Definition:

Sei k eine Kardinalzahl.

Eine Boolesche Algebra $\mathcal{A}$ heißt k -vollständig oder eine k -Algebra, wenn für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{A}$ mit $\text{card}(I) \leq k$ das Supremum $\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$ existiert.

Eine Boolesche Algebra heißt vollständig, wenn sie für jede Kardinalzahl k eine k -Algebra ist.

0.12 Bemerkung:

Sei κ eine Kardinalzahl.

Eine Boolesche Algebra $\mathcal{A}$ ist genau dann κ -vollständig (bzw. vollständig), wenn für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{A}$ mit $\text{card}(I) \leq \kappa$ das Infimum $\bigcap_{i \in I} A_i$ existiert (wenn dies für jede Kardinalzahl κ' gilt).

0.13 Definition:

$\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ heißt Unteralgebra von $\mathcal{A}$, wenn für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$ gilt:

- (i) $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{L}$
- (ii) $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{L}$
- (iii) $\bar{B}_1 \in \mathcal{L}$.

0.14 Bemerkung:

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra und $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$.

Dann gibt es eine kleinste Unteralgebra $\mathcal{L}$ von $\mathcal{A}$, die $\mathcal{T}$ enthält, nämlich den Durchschnitt aller Unteralgebren von $\mathcal{A}$, die $\mathcal{T}$ enthalten.

$\mathcal{L}$ heißt die von $\mathcal{T}$ erzeugte (oder aufgespannte) Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

$\mathcal{L}$ besteht aus allen Elementen von $\mathcal{A}$, die sich in der Form

$$(S_{1,1} \cap \dots \cap S_{1,n_1}) \cup \dots \cup (S_{m,1} \cap \dots \cap S_{m,n_m})$$

schreiben lassen, wobei $S_{\mu, \nu}$ oder $\bar{S}_{\mu, \nu}$ ein Element von $\mathcal{T}$ ist.

Ist $\mathcal{A}'$ eine Unteralgebra von $\mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{A}$, so besteht die von $\mathcal{A}' \cup \{A\}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{A}$ genau aus den Elementen der Form

$$(A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap \bar{A})$$

mit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}'$.

0.15 Definition:

Eine Unteralgebra $\mathcal{L}$ von $\mathcal{A}$ heißt κ -Unteralgebra oder κ -vollständige Unteralgebra von $\mathcal{A}$, wenn für jede Familie

$(A_i)_{i \in I}$ in $\mathfrak{A}$ mit $\text{card}(I) \leq \kappa$ das Supremum $\bigcup_{i \in I}^{\mathfrak{A}} A_i$ existiert und in $\mathfrak{A}$ liegt.

$\mathfrak{L}$ heißt vollständige Unterualgebra von $\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{L}$ für jede Kardinalzahl κ eine κ -Unterualgebra von $\mathfrak{A}$ ist.

Die von einer Teilmenge $T \subset \mathfrak{A}$ erzeugte κ -Unterualgebra (vollständige Unterualgebra) wird - falls sie existiert - als die kleinste κ -Unterualgebra (vollständige Unterualgebra) von $\mathfrak{A}$ definiert, die T enthält.

O.16 Definition:

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{A}$ heißt Filter, wenn gilt:

- (i) Sind $F_1, F_2 \in \mathfrak{f}$, so ist auch $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{f}$.
- (ii) Ist $F \in \mathfrak{f}$ und $A \in \mathfrak{A}$ mit $F \subset A$, so folgt $A \in \mathfrak{f}$.
- (iii) $0 \notin \mathfrak{f}$.

Eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{A}$ heißt Ideal, wenn gilt:

- (i) Für $N_1, N_2 \in \mathfrak{m}$ ist auch $N_1 \cup N_2 \in \mathfrak{m}$.
- (ii) Für $N \in \mathfrak{m}$ und $A \in \mathfrak{A}$ mit $A \subset N$ ist auch $A \in \mathfrak{m}$.
- (iii) $1 \notin \mathfrak{m}$.

O.17 Bemerkung:

- (i) Ein Filter $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}$ heißt Ultrafilter oder maximaler Filter, wenn für jeden Filter $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{f}$ gilt:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{f}$$

Ein Filter $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jedes $A \in \mathfrak{A}$ entweder $A \in \mathfrak{U}$ oder $\bar{A} \in \mathfrak{U}$ ist.

Jeder Filter in $\mathfrak{A}$ ist in einem Ultrafilter von $\mathfrak{A}$ enthalten.

Analoge Aussagen gelten für maximale Ideale.

- (ii) Sei $A \in \mathfrak{A} \setminus \{1\}$. Dann ist $\{A' \in \mathfrak{A}: A' \subset A\}$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$, das von A erzeugte Hauptideal.

- (iii) Für ein Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{A}$ wird die Quotientenalgebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$ in der üblichen Weise definiert:

Es zeigt sich, daß durch

$$A \sim A' : \Longleftrightarrow A \triangle A' := (A \cup A') \setminus (A \cap A') \in \mathcal{N}$$

auf $\mathcal{A}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ erklärt ist.

Auf $\mathcal{A}/\sim := \mathcal{A}/\sim$ werden Boolesche Operationen mit Hilfe der Repräsentanten erklärt.

0.18 Definition:

Sei κ eine Kardinalzahl.

Ein Ideal $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ heißt κ -vollständig oder ein κ -Ideal, wenn für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{N}$ mit $\text{card}(I) \leq \kappa$ das Supremum $\bigcup_{i \in I} A_i$ existiert und aus $\mathcal{N}$ ist.

Ein Ideal $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ heißt bedingt κ -vollständig, wenn für jedes $A \in \mathcal{N}$ das von A erzeugte Hauptideal κ -vollständig ist.

Ein Ideal $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ heißt vollständig (bedingt vollständig), wenn $\mathcal{N}$ für jede Kardinalzahl κ ein κ -vollständiges (bedingt κ -vollständiges) Ideal ist.

0.19 Bemerkung:

Ein Ideal $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ ist genau dann bedingt κ -vollständig, wenn für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{N}$ mit $\text{card}(I) \leq \kappa$ das Infimum $\bigcap_{i \in I} A_i$ existiert.

0.20 Definition:

Sei $\mathcal{B}$ eine weitere Boolesche Algebra.

Eine Abbildung $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt Boolescher Homomorphismus, falls für alle $A, A' \in \mathcal{A}$ gilt:

- (i) $\varphi(A \cap A') = \varphi(A) \cap \varphi(A')$
- (ii) $\varphi(A \cup A') = \varphi(A) \cup \varphi(A')$
- (iii) $\varphi(\complement A) = \complement \varphi(A)$

(Boolesche Iso-, Epi- und Monomorphismen werden auf nahe-
liegende Art definiert, wobei in dieser Arbeit im Gegen-
satz zu SIKORSKI [21] ein Isomorphismus stets surjektiv ist.)

Sei κ eine Kardinalzahl.

Ein Boolescher Homomorphismus $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt ein κ -Homomorphismus, falls für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{A}$ mit $\text{card}(I) \leq \kappa$, für die $\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$ existiert, auch $\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \varphi(A_i)$ existiert und außerdem gilt:

$$\varphi \left(\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i \right) = \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \varphi(A_i).$$

0.21 Bemerkung:

Es ist klar, daß ein κ -Homomorphismus auch Infima von Familien "erhält", deren Indexmenge höchstens die Mächtigkeit κ hat.

0.22 Bemerkung:

Ist $\mathcal{A}$ eine κ -Algebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein κ -Ideal, so ist die Quotientenabbildung $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein κ -Homomorphismus.

0.23 Definition:

Ein total-unzusammenhängender kompakter Raum (also ein kompakter Raum, in dem die zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen eine Basis der Topologie bilden) heißt Boolescher Raum.

Für einen Booleschen Raum X wird mit $\mathcal{A}(X)$ die Boolesche Algebra der zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen von X (mit den gewöhnlichen mengentheoretischen Operationen) bezeichnet.

0.24 Bemerkung:

Sind X und Y zwei homöomorphe Boolesche Räume, so sind $\mathcal{A}(X)$ und $\mathcal{A}(Y)$ isomorph.

0.25 Dualitätssatz von STONE:

Für jede Boolesche Algebra $\mathcal{A}$ existiert ein Boolescher Raum X , so daß $\mathcal{A}$ zu $\mathcal{A}(X)$ isomorph ist.
 X ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt.

Man spricht deshalb von dem zur Booleschen Algebra $\mathcal{A}$ gehörigen dualen Booleschen Raum X bzw. von dem Booleschen Darstellungsraum von $\mathcal{A}$.

Umgekehrt heißt für einen Booleschen Raum X jede zu $\mathcal{A}(X)$ isomorphe Boolesche Algebra eine zu X duale Boolesche Algebra.

Für die weiteren Überlegungen ist es wichtig, einige der für Boolesche Algebren definierten Begriffe in ihrer Bedeutung für die jeweiligen Booleschen Darstellungsräume zu interpretieren.

Sei dazu stets X ein Boolescher Raum und $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$.

0.26 Bemerkung:

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathcal{A}$.

Genau dann existiert $\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$ (bzw. $\bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$), wenn $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen (bzw. $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen) ist.

Dann gilt:

$$\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \quad (\text{bzw.} \quad \bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i = \overline{\bigcap_{i \in I} A_i})$$

0.27 Definition:

Sei k eine Kardinalzahl.

Eine Menge $A \subset X$ heißt k -abgeschlossen (k -offen), wenn sie Durchschnitt (Vereinigung) von höchstens k Mengen aus $\mathcal{A}$ ist.

Mit $\mathcal{F}^k(X)$ ($\mathcal{O}^k(X)$) werde das System der k -abgeschlossenen (k -offenen) Mengen aus X bezeichnet.

0.28 Weitere topologische Interpretationen von Eigenschaften Boolescher Algebren:

Genau dann ist $\mathcal{A}$ eine k -Algebra, wenn in X der Abschluß jeder k -offenen Menge offen ist oder - was dazu äquivalent ist - das Innere jeder k -abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.

$\mathcal{A}$ ist insbesondere genau dann vollständig, wenn in X der Abschluß jeder offenen Menge offen ist, das heißt, wenn X extrem-unzusammenhängend ist.

Der Boolesche Darstellungsraum einer Unteralgebra $\mathcal{L}$ von $\mathcal{A}$ ist das Bild von X unter einer stetigen Abbildung.

Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ ist genau dann ein Filter, wenn es eine abgeschlossene, nicht-leere Menge $A \subset X$ gibt, so daß

$$\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{A} : A \subset B\}$$

ist. Es gilt:

$$A = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B$$

Eine Teilmenge $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}$ ist genau dann ein Ideal, wenn es in X eine offene Menge $U \neq X$ gibt, so daß

$$\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset U\}$$

ist. Es gilt:

$$U = \bigcup_{A \in \mathcal{W}} A$$

Der Darstellungsraum der Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{W}$ ist dann homöomorph zu $\overline{U}$.

Ein Filter (Ideal) ist genau dann maximal, wenn die zugehörige abgeschlossene Menge (das Komplement der zugehörigen offenen Menge) einelementig ist.

Ein Ideal $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}$ ist genau dann k -vollständig, wenn für die zugehörige offene Menge U gilt:

Der Abschluß jeder k -offenen Teilmenge von U ist eine offene Teilmenge von U .

Ein Ideal $\mathcal{W} \subset \mathcal{A}$ ist genau dann bedingt k -vollständig, wenn das Innere jeder k -abgeschlossenen Teilmenge der zum Ideal gehörenden Menge U wieder abgeschlossen ist.

d) Maßräume

0.29 Definition:

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche σ -Algebra.

Eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ heißt Maß, wenn gilt:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Elemente von $\mathcal{A}$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ heißt endlich-additives Maß, wenn gilt:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ ist

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad .$$

Ein Maß (endlich-additives Maß) heißt endlich, wenn gilt:

$$\mu(I) < \infty \quad .$$

Ein Maßraum ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$, wobei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ -Unteralgebra von $\mathcal{P}(X)$ und $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Maß ist.

Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt endlich, wenn das zugehörige Maß μ endlich ist.

Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt vollständig, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ auch jede Menge $B \subset A$ zu $\mathcal{A}$ gehört.

Alle in dieser Arbeit nicht ausdrücklich definierten Begriffe aus der Maßtheorie werden im Sinn von BAUER [1] verwendet.

Außerdem wird in dieser Arbeit stets vorausgesetzt, daß in einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ existiert.

Teil I: AUSDEHNUNG DER STONESCHEN DUALITÄTSTHEORIE
AUF BOOLESCHE KORRESPONDENZEN

=====

§ 1. σ -Homomorphismen und α -Homomorphismen als Dualisie-
runge n Boolescher Korrespondenzen

In der STONESchen Dualitätstheorie für Boolesche Algebren entsprechen den Booleschen Homomorphismen dual die stetigen Abbildungen zwischen den jeweiligen Booleschen Darstellungsräumen und umgekehrt. HALMOS zeigt in [6], daß sich auch Abbildungen zwischen Booleschen Algebren, die nur vereinigungstreu sind, in analoger Weise dualisieren lassen: Dual gehören zu solchen Abbildungen punktabgeschlossene, stetige Relationen zwischen den Darstellungsräumen, das sind bis auf eine technisch bedingte Abweichung gerade die Booleschen Korrespondenzen.

Das Konzept von HALMOS wird von WRIGHT in [23] auf beliebige Abbildungen zwischen Booleschen Algebren ausgedehnt. WRIGHT zeigt, daß die vereinigungstreuen Abbildungen dadurch charakterisiert sind, daß eine zweimalige Dualisierung wieder auf auf die Ausgangsabbildung zurückführt.

Während HALMOS (und auch WRIGHT) ihre Untersuchungen im Hinblick auf Probleme der algebraischen Logik anstellten, entwickelte der Verfasser - von Liftingproblemen bei Booleschen Algebren ausgehend - (unabhängig von HALMOS und WRIGHT) eine Dualitätstheorie, die die Resultate von HALMOS beinhaltet, die aber darüber hinaus einen ordnungstheoretischen Aspekt berücksichtigt, der sich für spätere Anwendungen als recht nützlich erweist.

a) $\cup$ - und $\cap$ -Homomorphismen

1. 1 Definition:

Seien $(\mathfrak{Y}_1, \leq)$ und $(\mathfrak{Y}_2, \leq)$ geordnete Mengen.

Eine Abbildung $\varphi: \mathfrak{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{Y}_2$ heißt Ordnungshomomorphismus (bzw. Anti-Ordnungshomomorphismus), wenn für alle $S, S' \in \mathfrak{Y}_1$ mit $S \leq S'$ gilt: $\varphi(S) \leq \varphi(S')$ (bzw. $\varphi(S) \geq \varphi(S')$).

Ein bijektiver (Anti-) Ordnungshomomorphismus $\varphi: \mathfrak{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{Y}_2$ heißt (Anti-) Ordnungsisomorphismus, falls auch die Umkehrabbildung von φ ein (Anti-) Ordnungshomomorphismus ist.

Bemerkung:

Die Hintereinanderausführung zweier Anti-Ordnungshomomorphismen ist ein Ordnungshomomorphismus; die Hintereinanderausführung eines Ordnungs- und eines Anti-Ordnungshomomorphismus ist ein Anti-Ordnungshomomorphismus.

1. 2 Definition:

Sei $(\mathfrak{Y}, \leq)$ eine geordnete Menge.

Ein Element $S_0 \in \mathfrak{Y}$ heißt größtes (bzw. kleinstes) Element von $\mathfrak{Y}$, wenn für alle $S \in \mathfrak{Y}$ gilt:

$$S \leq S_0 \quad (\text{bzw. } S_0 \leq S)$$

Für zwei Elemente $S_1, S_2 \in \mathfrak{Y}$ heißt ein Element $S_0 \in \mathfrak{Y}$ mit $S_1 \leq S_0$, $S_2 \leq S_0$ (bzw. $S_0 \leq S_1$, $S_0 \leq S_2$) und $S_0 \leq S$ für alle $S \in \mathfrak{Y}$ mit $S_1 \leq S$ und $S_2 \leq S$ (bzw. $S \leq S_0$ für alle $S \in \mathfrak{Y}$ mit $S \leq S_1$ und $S \leq S_2$) das Supremum (bzw. Infimum) von S_1 und S_2 , in Zeichen $S_0 = S_1 \cup S_2$ (bzw. $S_0 = S_1 \cap S_2$).

1. 3 Bemerkung:

Für eine geordnete Menge $(\mathfrak{Y}, \leq)$ sind - falls sie existieren - größtes und kleinstes Element, sowie Infimum und Supremum von zwei Elementen eindeutig bestimmt.

1. 4 Definition:

Eine geordnete Menge $(\mathcal{V}, \leq)$ heißt Verband, wenn für jedes Paar $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}^2$ sowohl das Supremum $V_1 \cup V_2$ als auch das Infimum $V_1 \cap V_2$ existieren.

1. 5 Bemerkung:

- (i) Jede Boolesche Algebra ist ein Verband mit größtem Element 1 und kleinstem Element 0. Das Supremum von zwei Elementen ist gerade die Boolesche Vereinigung und das Infimum gerade der Boolesche Durchschnitt.
- (ii) Für einen topologischen Raum X ist sowohl das System $\mathcal{F}(X)$ der abgeschlossenen Mengen als auch das System $\mathcal{O}(X)$ der offenen Mengen ein Verband bezüglich der mengentheoretischen Inklusion. Die leere Menge ist das kleinste und der Gesamt-raum X das größte Element dieser Verbände. Das Supremum zweier Elemente in diesen Verbänden ist gerade die mengentheoretische Vereinigung und das Infimum gerade der mengentheoretische Durchschnitt.

1. 6 Definition:

Seien $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ Verbände mit kleinstem Element 0 und größtem Element 1.

Eine Abbildung $\varphi: \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ heißt $\cup$ -Homomorphismus (bzw. $\cap$ -Homomorphismus), wenn für alle $V, V' \in \mathcal{V}_1$ gilt:

- (i) $\varphi(V \cup V') = \varphi(V) \cup \varphi(V')$ (bzw. $\varphi(V \cap V') = \varphi(V) \cap \varphi(V')$)
- (ii) $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$

Die Menge der $\cup$ -Homomorphismen von $\mathcal{V}_1$ nach $\mathcal{V}_2$ werde mit $\text{VH}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$, die der $\cap$ -Homomorphismen mit $\text{DH}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ bezeichnet.

1. 7 Bemerkung:

- (i) Die Bedingung (ii) in Definition 1.6 wird abweichend von der üblichen Nomenklatur hier eingeführt,

um später unnötig komplizierte Begriffsbildungen zu vermeiden.

(ii) Es ist klar, daß sowohl die $\cup$ - als auch die $\cap$ -Homomorphismen Ordnungshomomorphismen sind.

(iii) Ein Ordnungsisomorphismus zwischen zwei Verbänden ist ein $\cup$ - und $\cap$ -Homomorphismus.

Für einen Anti-Ordnungsisomorphismus $\varphi: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ zwischen zwei Verbänden $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ und alle $V, V' \in \mathcal{V}_1$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(V \cup V') &= \varphi(V) \cap \varphi(V') \\ \text{und} \quad \varphi(V \cap V') &= \varphi(V) \cup \varphi(V') \end{aligned}$$

Seien im folgenden stets $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ Verbände mit kleinstem Element 0 und größtem Element 1.

1. 8 Definition:

Auf $\text{VH}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ (bzw. $\text{DH}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$) werde folgende kanonische Ordnung eingeführt:

Für $\varphi, \psi \in \text{VH}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ (bzw. $\text{DH}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$) sei $\varphi \leq \psi$ genau dann, wenn für alle $V \in \mathcal{V}_1$ gilt:

$$\varphi(V) \leq \psi(V)$$

Bemerkung:

Dann erfüllt $\leq$ die Axiome einer Ordnungsrelation auf $\text{VH}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ (bzw. $\text{DH}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$).

1. 9 Lemma:

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra. Dann ist die Abbildung

$$\Phi: \text{VH}(\mathcal{A}, \mathcal{F}(X)) \longrightarrow \text{DH}(\mathcal{A}, \mathcal{C}(X))$$

definiert durch

$$\varphi'(A) := (\Phi(\varphi))(A) := \bigcap \{ \varphi(B) \mid A \subseteq B \}$$

ein Anti-Ordnungsisomorphismus.

Ist $\varphi \in \text{VH}(\mathcal{A}, \mathcal{F}(X))$ zusätzlich ein $\cap$ -Homomorphismus, so gilt

$$(\Phi(\varphi))(A) = \varphi(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Der elementare Beweis soll hier nicht durchgeführt werden.

1.10 Lemma:

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Boolesche Algebren.

Dann ist die Abbildung
$$\begin{array}{ccc} \text{VH}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \text{DH}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array},$$

wobei $\varphi'(A) := \bigvee \{A\}$ ($A \in \mathcal{A}$) ist,
ein Anti-Ordnungsisomorphismus.

Die Umkehrabbildung ist

$$\begin{array}{ccc} \text{DH}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \text{VH}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ \psi & \longmapsto & \psi' \end{array}$$

mit $\psi'(A) = \bigvee \{A\}$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Auch hier soll der Beweis nicht ausgeführt werden.

b) Boolesche Korrespondenzen

1.11 Definition:

Eine stetige punktabgeschlossene Korrespondenz zwischen zwei Booleschen Räumen X und Y heiße Boolesche Korrespondenz.

Mit $\text{BK}(X, Y)$ werde die Menge aller Booleschen Korrespondenzen von X nach Y (versehen mit der kanonischen Ordnung $\leq$) bezeichnet.

1.12 Bemerkung:

Für Boolesche Räume X und Y gilt natürlich $\text{BK}(X, Y) \subseteq \text{OK}(X, Y)$, d.h. jede Boolesche Korrespondenz ist punktabgeschlossen und oberhalb-stetig.

Im folgenden seien stets X, Y und Z Boolesche Räume.

1.13 Lemma:

Eine punktabgeschlossene Korrespondenz F von X nach Y

ist genau dann Boolesch, wenn für alle $B \in \mathcal{O}(Y)$ gilt:

$$F^{-1}(B) \in \mathcal{O}(X)$$

Beweis:

- (1) Sei $F \in BK(X, Y)$. Nach Definition ist dann F stetig, d.h. das Urbild jeder offenen Mengen unter F ist offen und das Urbild jeder abgeschlossenen Menge unter F ist abgeschlossen; insbesondere gilt also

$$F^{-1}(B) \in \mathcal{O}(X)$$

für alle $B \in \mathcal{O}(Y)$.

- (2) Sei nun F eine punktabgeschlossene Korrespondenz von X nach Y , so daß für alle $B \in \mathcal{O}(Y)$ das Urbild $F^{-1}(B)$ aus $\mathcal{O}(X)$ ist.

Ist U eine offene Teilmenge von Y , so gibt es eine Familie $(B_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{O}(Y)$ mit

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} F^{-1}(U) &= \{x \in X: F(x) \cap \bigcup_{i \in I} B_i \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{x \in X: F(x) \cap B_i \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup_{i \in I} F^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung über F ist $F^{-1}(B_i) \in \mathcal{O}(X)$ für alle $i \in I$ und daher $F^{-1}(U)$ offen in X .

Sei $Q \subset Y$ abgeschlossen und $\mathcal{T} := \{B \in \mathcal{O}(Y): Q \subset B\}$.

Dann gilt

$$Q = \bigcap_{B \in \mathcal{T}} B$$

und darum

$$F^{-1}(Q) = \{x \in X: F(x) \cap \bigcap_{B \in \mathcal{T}} B \neq \emptyset\}.$$

Weil Y kompakt und $\mathcal{T}$ stabil gegen endliche Durchschnitte ist, folgt daraus

$$F^{-1}(Q) = \bigcap_{B \in \mathcal{T}} F^{-1}(B).$$

Nach Voraussetzung über F ist deshalb $F^{-1}(Q)$ abgeschlossen.

1.14 Lemma:

Die Hintereinanderausführung zweier Boolescher Korrespondenzen ist wieder eine Boolesche Korrespondenz.

Beweis:

Sei $F \in BK(X, Y)$ und $G \in BK(Y, Z)$. Da $G \circ F$ wieder eine Korrespondenz ist, bleibt nur zu zeigen, daß $G \circ F$ auch punktabgeschlossen und stetig ist.

(1) Sei $x \in X$ und $z \in \overline{G \circ F(x)}$. Sei $\mathcal{U} := \{A \in \mathcal{O}(Z) : z \in A\}$.

Für alle $A \in \mathcal{U}$ ist $A \cap G \circ F(x) \neq \emptyset$. Es gibt also ein $y \in F(x)$ mit $G(y) \cap A \neq \emptyset$, d.h. $G^{-1}(A) \cap F(x) \neq \emptyset$.

Weil Y kompakt und $\{G^{-1}(A) : A \in \mathcal{U}\}$ gegen endliche Durchschnitte stabil ist, folgt:

$$B := \bigcap_{A \in \mathcal{U}} G^{-1}(A) \cap F(x) \neq \emptyset.$$

Sei $y \in B$. Dann ist $G(y) \cap A \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{U}$, also

$$z \in \overline{G(y)} = G(y) \subset G \circ F(x).$$

Somit gilt $\overline{G \circ F(x)} = G \circ F(x)$.

Da $x \in X$ beliebig war, ist deshalb $G \circ F$ punktabgeschlossen.

(2) Für jede Teilmenge $C \subset Z$ gilt:

$$(G \circ F)^{-1}(C) = F^{-1}(G^{-1}(C)).$$

Die Stetigkeit von $G \circ F$ ist daher eine unmittelbare Konsequenz aus der Stetigkeit von F und G .

1.15 Bemerkung:

Aus den bisher bewiesenen Aussagen folgt leicht:

Die Booleschen Räume mit den Booleschen Korrespondenzen als Morphismen bilden eine Kategorie.

Das nächste Lemma stellt das entscheidende Hilfsmittel für die folgenden Überlegungen bereit:

1.16 Lemma:

Sei $F \in BK(X, Y)$ und $B \in \mathcal{O}(Y)$.

Dann ist

$$F_B: X \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$$

definiert durch

$$F_B(x) = \begin{cases} F(x) & , \quad x \notin F^{-1}(B) \\ F(x) \cap B, & x \in F^{-1}(B) \end{cases}$$

eine Boolesche Korrespondenz mit

$$F_B^{-1}(B) \cap F_B^{-1}(\complement B) = \emptyset \quad .$$

Beweis:

Daß F_B eine punktabgeschlossene Korrespondenz ist, folgt unmittelbar aus der Definition.

Sei $A \in \mathcal{O}(Y)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_B^{-1}(A) &= \{x \in X: (x \notin F^{-1}(B) \text{ und } F(x) \cap A \neq \emptyset) \text{ oder} \\ &\quad (x \in F^{-1}(B) \text{ und } F(x) \cap B \cap A \neq \emptyset)\} \\ &= (F^{-1}(A) \setminus F^{-1}(B)) \cup (F^{-1}(B) \cap F^{-1}(A \cap B)) \quad . \end{aligned}$$

Weil F eine Boolesche Korrespondenz ist, ergibt sich hieraus

$$F_B^{-1}(A) \in \mathcal{O}(X).$$

Also ist F_B nach Lemma 1.13 eine Boolesche Korrespondenz.

Es gilt außerdem

$$F_B^{-1}(B) = (F^{-1}(B) \setminus F^{-1}(B)) \cup (F^{-1}(B) \cap F^{-1}(B)) = F^{-1}(B)$$

und

$$\begin{aligned} F_B^{-1}(\complement B) &= (F^{-1}(\complement B) \setminus F^{-1}(B)) \cup (F^{-1}(B) \cap F^{-1}(\emptyset)) \\ &= F^{-1}(\complement B) \cap F^{-1}(B), \end{aligned}$$

also

$$F_B^{-1}(B) \cap F_B^{-1}(\complement B) = \emptyset \quad .$$

1.17 Satz:

Die minimalen Elemente in $BK(X, Y)$ sind genau die stetigen Abbildungen von X nach Y .

Beweis:

(1) Sei $F \in BK(X, Y)$ minimal. Angenommen es gäbe ein $x \in X$

und $y_1, y_2 \in F(x)$ mit $y_1 \neq y_2$. Dann würde ein $B \in \mathcal{A}(Y)$ existieren mit $y_1 \in B$ und $y_2 \notin B$. Die wie in Lemma 1.16 definierte Boolesche Korrespondenz F_B wäre somit echt kleiner als F , im Widerspruch zur Minimalität von F .

Also ist für alle $x \in X$ die Menge $F(x)$ einelementig. Anders ausgedrückt: F ist eine Abbildung von X nach Y . Da F eine stetige Korrespondenz ist, ist F auch als Abbildung stetig.

- (2) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann gilt natürlich $f \in BK(X, Y)$. Ist $F \in BK(X, Y)$ und $F \leq f$, so gilt wegen $F(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$:

$$F = f$$

Also ist f minimal in $BK(X, Y)$.

Frage:

Es ist unmittelbar klar, daß alle stetigen Abbildungen von X nach Y minimale Elemente von $OK(X, Y)$ sind.

Ist umgekehrt auch jedes minimale Element in $OK(X, Y)$ eine stetige Abbildung von X nach Y ?

c) Der Dualitätssatz

Seien im folgenden $\mathcal{A}, \mathcal{L}$ und $\mathcal{Z}$ Boolesche Algebren mit dualen Booleschen Räumen X, Y und Z .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei außerdem $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$, $\mathcal{L} = \mathcal{A}(Y)$ und $\mathcal{Z} = \mathcal{A}(Z)$.

1.18 Satz:

Es gibt einen Ordnungsisomorphismus von $OK(X, Y)$ auf $VH(\mathcal{L}, \mathcal{F}(X))$, der $BK(X, Y)$ auf $VH(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ abbildet.

Genauer gilt:

Die Abbildung
$$\begin{array}{ccc} \text{OK}(X, Y) & \longrightarrow & \text{VH}(\mathcal{L}, \mathcal{F}(X)) \\ F & \longmapsto & F^* \end{array} ,$$

wobei für $B \in \mathcal{L}$ $F^*(B) = F^{-1}(B)$ ist, ist ein Ordnungsisomorphismus mit $F^* \in \text{VH}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ für alle $F \in \text{BK}(X, Y)$.

Die Umkehrabbildung ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{VH}(\mathcal{L}, \mathcal{F}(X)) & \longrightarrow & \text{OK}(X, Y) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^* \end{array} ,$$

wobei für $x \in X$
$$\varphi^*(x) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}_x} B \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}_x = \{B \in \mathcal{L} : x \notin \varphi(\{B\})\}$$

ist.

Beweis:

- (1) Wie man sofort sieht, ist für jedes $F \in \text{OK}(X, Y)$ die Abbildung $F^* \in \text{VH}(\mathcal{L}, \mathcal{F}(X))$ und deshalb die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \phi: \text{OK}(X, Y) & \longrightarrow & \text{VH}(\mathcal{L}, \mathcal{F}(X)) \\ F & \longmapsto & F^* \end{array}$$

wohldefiniert.

- (2) Seien nun $F, G \in \text{OK}(X, Y)$ mit $F \leq G$.

Für $B \in \mathcal{L}$ gilt dann

$$\begin{aligned} F^*(B) = F^{-1}(B) &= \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\} \subset \{x \in X : G(x) \cap B \neq \emptyset\} = \\ &= G^{-1}(B) = G^*(B) \end{aligned}$$

Also ist $F^* \leq G^*$.

Die Abbildung ϕ ist demnach ein Ordnungshomomorphismus.

- (3) Daß die Abbildung $\varphi \longmapsto \varphi^*$ von $\text{VH}(\mathcal{L}, \mathcal{F}(X))$ nach $\text{OK}(X, Y)$ wohldefiniert ist, ergibt sich wie folgt:

Sei $\varphi \in \text{VH}(\mathcal{L}, \mathcal{F}(X))$. Für $x \in X$ ist dann $\varphi^*(x)$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen.

Da φ $\cup$ -Homomorphismus ist, ist $\mathcal{F}_x = \{B \in \mathcal{L} : x \notin \varphi(\{B\})\}$ ein Filter in $\mathcal{L}$ und wegen der Kompaktheit von Y folgt hieraus

$$\varphi^*(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}_x} A \neq \emptyset.$$

φ^* ist also eine punktabgeschlossene Korrespondenz von X nach Y .

Behauptung: Für alle $B \in \mathfrak{L}$ ist $(\varphi^*)^{-1}(B) = \varphi(B)$.

Beweis der Behauptung:

Sei $B \in \mathfrak{L}$ und für $x \in X$ sei wieder

$$\mathfrak{f}_x := \{B \in \mathfrak{L}: x \notin \varphi(B)\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi^*)^{-1}(B) &= \{x \in X: \varphi^*(x) \cap B \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X: \bigcap_{C \in \mathfrak{f}_x} C \cap B \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Für $x \in X$ folgt, weil Y kompakt und $\mathfrak{f}_x$ ein Filter in $\mathfrak{L} = \mathcal{O}(Y)$ ist, daß $\bigcap_{C \in \mathfrak{f}_x} C \cap B \neq \emptyset$ genau dann gilt, wenn für alle $C \in \mathfrak{f}_x$ $C \cap B \neq \emptyset$ ist.

Ist $x \notin (\varphi^*)^{-1}(B)$, so existiert deshalb ein $C \in \mathfrak{f}_x$ mit $C \cap B = \emptyset$, d.h. $x \notin \varphi(C)$ und $C \cap B = \emptyset$.

Für dieses C gilt demnach $B \subset C$ und darum

$$\varphi(B) \subset \varphi(C).$$

Aus $x \notin \varphi(C)$ folgt deshalb $x \notin \varphi(B)$.

Ist umgekehrt $x \notin \varphi(B)$, so gilt $B \in \mathfrak{f}_x$, d.h.

$$\bigcap_{C \in \mathfrak{f}_x} C \cap B = \emptyset, \text{ also } x \notin (\varphi^*)^{-1}(B).$$

Insgesamt folgt so die Behauptung.

Aus der Behauptung wiederum ergibt sich sofort, daß

φ^* oberhalb-stetig und $(\varphi^*)^* = \varphi$ ist.

Zusammen mit dem früher Bewiesenen folgt daher, daß

$\varphi^* \in \mathcal{O}\mathcal{K}(X, Y)$ ist.

(4) Seien $\varphi, \psi \in \text{VH}(\mathfrak{L}, \mathcal{F}(X))$ mit $\varphi \leq \psi$.

Dann ist für $x \in X$:

$$\{B \in \mathfrak{L}: x \notin \varphi(B)\} \subset \{B \in \mathfrak{L}: x \notin \psi(B)\},$$

weil $\varphi(B) \subset \psi(B)$ für alle $B \in \mathfrak{L}$ gilt.

Aus dieser Tatsache folgt nach Definition von $\varphi^*(x)$

bzw. $\varphi^*(x)$ sofort, daß

$$\varphi^*(x) \subset \psi^*(x),$$

also

$$\varphi^* \leq \psi^* \quad \text{ist.}$$

- (5) Wie wir schon sahen (vgl. (3)), ist für $\varphi \in \text{VH}(\mathbb{L}, \mathcal{F}(X))$ stets
- $$(\varphi^*)^* = \varphi \quad .$$

Sei nun $F \in \text{OK}(X, Y)$ und $x \in X$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \bigcap_x &:= \{B \in \mathbb{L}: x \notin F^*(\{B\})\} = \{B \in \mathbb{L}: x \notin F^{-1}(\{B\})\} \\ &= \{B \in \mathbb{L}: F(x) \setminus B = \emptyset\} = \{B \in \mathbb{L}: F(x) \subset B\} \quad . \end{aligned}$$

Nun ist der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathbb{L}$, die $F(x)$ enthalten, wieder $F(x)$ selbst. Deshalb folgt:

$$(F^*)^*(x) = \bigcap_{B \in \bigcap_x} B = F(x) \quad .$$

Also ist $(F^*)^* = F$.

Die Umkehrabbildung von ϕ ist daher die Abbildung

$$\varphi \mapsto \varphi^* \text{ von } \text{VH}(\mathbb{L}, \mathcal{F}(X)) \text{ nach } \text{OK}(X, Y) \quad .$$

- (6) Sei $\varphi \in \text{VH}(\mathbb{L}, \mathcal{O})$. Dann ist für jedes $B \in \mathbb{L}$

$$(\varphi^*)^{-1}(B) = (\varphi^*)^*(B) = \varphi(B) \in \mathcal{O}$$

Nach Lemma 1.13 ist φ^* daher eine Boolesche Korrespondenz.

Sei $F \in \text{BK}(X, Y)$. Dann ist für $B \in \mathbb{L}$:

$$F^*(B) = F^{-1}(B) \in \mathcal{O}, \text{ also } F^* \in \text{VH}(\mathbb{L}, \mathcal{O}).$$

(1) bis (6) zusammen liefern die Behauptung des Satzes.

1.19 Bemerkung:

Daß eine bijektive Beziehung zwischen $\text{BK}(X, Y)$ und $\text{VH}(\mathbb{L}, \mathcal{O})$ besteht, wurde schon von HALMOS in [6] bewiesen. Die im vorangehenden Satz auftretenden neuen Aspekte sind:

1. die Ausdehnung der Aussage auf $\text{OK}(X, Y)$ und $\text{VH}(\mathbb{L}, \mathcal{F}(X))$,
2. die ordnungstheoretische Variante, die implizit schon bei WRIGHT [23] auftritt.

1.20 Korollar:

Es gibt einen Anti-Ordnungsisomorphismus von $\text{OK}(X, Y)$ auf $\text{DH}(\mathbb{L}, \mathcal{O}(X))$, der $\text{BK}(X, Y)$ auf $\text{DH}(\mathbb{L}, \mathcal{O})$ abbildet.

Genauer gilt:

$$\begin{array}{ccc} \text{OK}(X, Y) & \longrightarrow & \text{DH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{G}(X)) \\ F & \longmapsto & F_* \end{array}$$

mit $F_*(B) = (F^*)^{-1}(B) = \bigcup \{F^*(\bigcap B) \mid B \in \mathfrak{L}\}$ für alle $B \in \mathfrak{L}$ ist ein Anti-Ordnungsisomorphismus mit den verlangten Eigenschaften.

Die Umkehrabbildung wird gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} \text{DH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{G}(X)) & \longrightarrow & \text{OK}(X, Y) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi_* \end{array}$$

mit $\varphi_*(x) := \bigcap_{B \in \mathfrak{L}_x} B$ und $\mathfrak{L}_x := \{B \in \mathfrak{L} : x \in \varphi(B)\}$ für alle $x \in X$.

Beweis:

Nach Lemma 1.9 ist $\varphi \mapsto \varphi^*$ ein Anti-Ordnungsisomorphismus ϕ von $\text{VH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}(X))$ nach $\text{DH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{G}(X))$. Die Abbildung $F \mapsto F_*$ von $\text{OK}(X, Y)$ nach $\text{DH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{G}(X))$ ist demnach als Hintereinanderausführung des Ordnungsisomorphismus $F \mapsto F^*$ von $\text{OK}(X, Y)$ nach $\text{VH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}(X))$ und des Anti-Ordnungsisomorphismus ϕ selbst ein Anti-Ordnungsisomorphismus.

Da ϕ außerdem $\text{VH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{A})$ auf $\text{DH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{A})$ abbildet (vgl. Lemma 1.10), folgt der erste Teil des Korollars aus Satz 1.18.

Die Umkehrabbildung setzt sich zusammen aus der Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^*$ ($\varphi \in \text{DH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{G}(X))$) und der Abbildung $\psi \mapsto \psi^*$ ($\psi \in \text{VH}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}(X))$), d. h. es gilt:

$$\varphi_*(x) = (\varphi^*)^*(x) = \bigcap_{\substack{B \in \mathfrak{L} \\ x \notin \varphi^*(\bigcap B)}} B = \bigcap_{\substack{B \in \mathfrak{L} \\ x \notin \varphi(B)}} B = \bigcap_{\substack{B \in \mathfrak{L} \\ x \in \varphi(B)}} B.$$

Insgesamt folgt so die Behauptung des Korollars.

Das folgende Lemma wurde für Boolesche Korrespondenzen schon von HALMOS in [6] bewiesen.

1.21 Lemma:

(1) Ist $F \in \text{OK}(X, Y)$ und $G \in \text{OK}(Y, Z)$, so gilt:

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

(2) Ist $\varphi \in \text{VH}(\mathcal{O}, \mathcal{L})$ und $\psi \in \text{VH}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, so gilt:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \quad .$$

(3) Ist $\varphi \in \text{DH}(\mathcal{O}, \mathcal{K})$ und $\psi \in \text{DH}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$, so gilt:

$$(\psi \circ \varphi)_* = \varphi_* \circ \psi_* \quad .$$

Beweis:

(1) Weil für die Relationen F und G die Beziehung $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$ bekannt ist, folgt Aussage (1) sofort.

(2) Für $C \in \mathcal{L}$ gilt nach Satz 1.18:

$$\begin{aligned} ((\psi \circ \varphi)^*)^{-1}(C) &= \psi(\varphi(C)) = \psi((\varphi^*)^{-1}(C)) \\ &= (\psi^*)^{-1}((\varphi^*)^{-1}(C)) \\ &= (\varphi^* \circ \psi^*)^{-1}(C) \end{aligned} \quad .$$

Also ist $((\psi \circ \varphi)^*)^* = (\varphi^* \circ \psi^*)^*$ und aus Satz 1.18 folgt:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \quad .$$

(3) folgt mittels Korollar 1.20 sofort aus (2).

1.22 Bemerkung:

Mit wenigen zusätzlichen Überlegungen kann man einen Teil der in diesem Abschnitt bewiesenen Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

Die Kategorie $\mathcal{K}$ der Booleschen Räume mit Booleschen Korrespondenzen als Morphismen ist dual (oft auch quasi-dual oder anti-äquivalent genannt) zur Kategorie der Booleschen Algebren mit den ω -Homomorphismen als Morphismen und ebenso ist $\mathcal{K}$ dual zur Kategorie der Booleschen Algebren mit den α -Homomorphismen als Morphismen.

d) Boolesche Homomorphismen und ihre Dualisierung

Wie im letzten Abschnitt seien $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{L}$ Boolesche Algebren mit dualen Booleschen Räumen X und Y .

O.B.d.A. sei $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(X)$ und $\mathcal{L} = \mathcal{Q}(Y)$.

1.23 Lemma:

Für eine Abbildung $\varphi \in \text{VH}(\mathcal{Q}, \mathcal{L})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) φ ist ein Boolescher Homomorphismus.
- (ii) $\varphi \in \text{DH}(\mathcal{Q}, \mathcal{L})$
- (iii) φ ist minimal in $\text{VH}(\mathcal{Q}, \mathcal{L})$.
- (iv) Für alle $y \in Y$ ist $\varphi^*(y)$ einelementig.

Beweis:

Aus der Definition von $\cup$ - und $\cap$ -Homomorphismen folgt sofort die Äquivalenz von (i) und (ii).

(ii) $\implies$ (iv):

Sei $\varphi \in \text{DH}(\mathcal{Q}, \mathcal{L})$. Angenommen es gäbe ein $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in \varphi^*(y)$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann würde ein $A \in \mathcal{Q}$ existieren mit $x_1 \in A$ und $x_2 \notin A$, was zur Folge hätte, daß

$$\begin{aligned} \varphi(A) \cap \varphi(\complement A) &= (\varphi^*)^{-1}(A) \cap (\varphi^*)^{-1}(\complement A) \\ &= \{y' \in Y: \varphi^*(y') \cap A \neq \emptyset\} \cap \{y' \in Y: \varphi^*(y') \cap A \neq \emptyset\} \\ &\supset \{y\} \end{aligned}$$

also $\varphi(A) \cap \varphi(\complement A) \neq \emptyset = \varphi(A \cap \complement A)$ wäre.

Das wäre ein Widerspruch zur (endlichen) Durchschnittsstabilität von φ .

Deshalb ist $\varphi^*(y)$ einelementig für alle $y \in Y$.

(iv) $\implies$ (iii):

Ist für alle $y \in Y$ die Menge $\varphi^*(y)$ einelementig, so kann φ^* als stetige Abbildung von Y nach X aufgefaßt werden.

Nach Satz 1.17 ist dann φ^* minimal in $\text{BK}(Y, X)$ und mittels Satz 1.18 folgt hieraus, daß φ minimal in $\text{VH}(\mathcal{Q}, \mathcal{L})$ ist.

(iii) $\implies$ (ii):

Sei φ minimal in $VH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Nach Satz 1.18 ist dann minimal in $BK(Y, X)$, also nach Satz 1.17 eine stetige Abbildung von Y nach X . Für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gilt deshalb:

$$\begin{aligned}\varphi(A_1 \cap A_2) &= (\varphi^*)^{-1}(A_1 \cap A_2) = (\varphi^*)^{-1}(A_1) \cap (\varphi^*)^{-1}(A_2) \\ &= \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2).\end{aligned}$$

Es gilt also $\varphi \in DH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

1.24 Bemerkung:

Der Ordnungsisomorphismus $\varphi \mapsto \varphi^*$ von $VH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ nach $BK(Y, X)$ bildet nach Lemma 1.23 die Menge $DH(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap VH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ der Booleschen Homomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gerade auf die Menge der stetigen Abbildungen von Y nach X ab und liefert damit die bekannte Stonesche Dualität zwischen Booleschen Homomorphismen und stetigen Abbildungen.

Wegen ihrer Bedeutung für die späteren Überlegungen soll eine aus dem vorangehenden Lemma direkt folgende Aussage noch einmal explizit formuliert werden:

1.25 Korollar:

Die minimalen Elemente in $VH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bzw. die maximalen Elemente in $DH(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sind genau die Booleschen Homomorphismen.

Beweis:

Die Aussage über die σ -Homomorphismen wurde bereits im vorangehenden Lemma bewiesen, diejenige über die $\cap$ -Homomorphismen folgt daraus nach Lemma 1.10 sofort.

1.26 Bemerkung:

Das Korollar 1.25 verallgemeinert ein Resultat von GAPAILLARD, der in [3] Liftings als maximale untere bzw. minimale obere Dichten charakterisiert.

§ 2. Ein Existenzsatz für stetige Schnitte Boolescher Korrespondenzen und seine Dualisierungen

2. 1 Definition:

Seien X und Y topologische Räume und $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ eine Korrespondenz.

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt stetiger Schnitt für F , falls gilt:

- (i) $f(x) \in F(x)$ für alle $x \in X$,
- (ii) f ist stetig.

2. 2 Bemerkung:

Sind X und Y speziell Boolesche Räume und ist $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ eine oberhalb-stetige Korrespondenz, so ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann ein stetiger Schnitt für F , wenn $f \leq F$ ist.

Dual zur Begriffsbildung des stetigen Schnittes einer oberhalb-stetigen Korrespondenz zwischen Booleschen Räumen wird in der folgenden Definition der Begriff der "Verschärfung" eines $\cup$ - bzw. $\cap$ -Homomorphismus eingeführt. Es handelt sich dabei nur um eine abkürzende Bezeichnung für den internen Gebrauch in dieser Arbeit.

2. 3 Definition:

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Boolesche Algebren und $\varphi \in \text{VH}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (bzw. $\text{DH}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$).

Ein Boolescher Homomorphismus $\psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heiße Verschärfung von φ , falls $\psi \leq \varphi$ (bzw. $\varphi \leq \psi$) ist.

Seien im folgenden wieder $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Boolesche Algebren mit dualen Booleschen Räumen X und Y .

O.B.d.A. sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$ und $\mathcal{B} = \mathcal{A}(Y)$.

2. 4 Definition:

Eine Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}(X)$ heißt punktetrennend, wenn für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ ein $S \in \mathcal{T}$ existiert, so daß $x_1 \in S$ und $x_2 \notin S$ ist.

Lemma:

Eine Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ ist genau dann punktetreunend, wenn $\mathcal{T}$ die Algebra $\mathcal{O}$ erzeugt.

Beweis:

- (1) Sei $\mathcal{T}$ punktetreunend, $\mathcal{L}$ die von $\mathcal{T}$ in $\mathcal{O}$ erzeugte Unter algebra und $A \in \mathcal{O}$.

Weil $\mathcal{T}$ punktetreunend ist, gibt es für $x \in A$ und $y \notin A$ ein $A_{x,y} \in \mathcal{T}$ mit $y \in A_{x,y}$ und $x \notin A_{x,y}$. Weil A eine kompakte Teilmenge von X ist, gibt es $y_1, \dots, y_n \in A$ mit

$$A \subset A_{x,y_1} \cup \dots \cup A_{x,y_n} =: B_x.$$

Dann ist $B_x \in \mathcal{L}$ und $x \in B_x \subset A$.

Da A kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_m \in A$ mit

$$A = B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_m}.$$

Also gilt $A \in \mathcal{L}$.

$\mathcal{T}$ erzeugt demnach die Algebra $\mathcal{O}$.

- (2) Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{O}$. Seien $x_1, x_2 \in X$, so daß für jedes $S \in \mathcal{T}$ genau dann $x_1 \in S$ ist, wenn $x_2 \in S$ ist. Sei $A \in \mathcal{O}$ und $x_1 \in A$. Es existieren $S_{\mu,v}$ mit $S_{\mu,v} \in \mathcal{T}$ oder $\{S_{\mu,v} \in \mathcal{T} \text{ und}$

$$A = (S_{1,1} \cap \dots \cap S_{1,n_1}) \cup \dots \cup (S_{m,1} \cap \dots \cap S_{m,n_m}).$$

Dann gibt es ein $\mu \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$x_1 \in S_{\mu,1} \cap \dots \cap S_{\mu,n_\mu}.$$

Nach Voraussetzung ist dann auch $x_2 \in S_{\mu,1} \cap \dots \cap S_{\mu,n_\mu} \subset A$.

Da $\mathcal{O}$ die Punkte von X trennt, folgt daraus $x_1 = x_2$.

Also ist $\mathcal{T}$ eine punktetreunende Teilmenge von $\mathcal{O}$.

2. 5 Definition:

Sei F eine Boolesche Korrespondenz von X nach Y .

F erfülle die Bedingung (V), wenn gilt:

Es existiert eine punktetrennende Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{Q}(Y)$,
so daß für jede Kardinalzahl

$$k < \text{card}(\{S \in \mathcal{T} : F^{-1}(S) \cap F^{-1}(\{S\} \neq \emptyset\})$$

und für alle $A \in \mathcal{Q}(Y)$ gilt:

Für jede k -abgeschlossene Menge $K \subset F^{-1}(A) \cap F^{-1}(\{A\})$
ist das Innere $\overset{\circ}{K}$ von K wieder abgeschlossen.

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

2. 6 Satz:

Erfüllt eine Boolesche Korrespondenz F von X nach Y die Bedingung (V), so existiert ein stetiger Schnitt für F .

Zum Beweis des Satzes werden folgende beiden Hilfssätze benötigt:

2. 7 Hilfssatz:

Sei $\varphi \in \text{VH}(\mathcal{Q}(X), \mathcal{F}(Y))$, so daß für alle $A \in \mathcal{Q}$ die Menge $\overline{\varphi(A)}$ abgeschlossen ist.

Dann ist $\overset{\circ}{\varphi} : \mathcal{Q} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{Q}}$ definiert durch

$$\overset{\circ}{\varphi}(A) = \overline{\varphi(A)} \quad (A \in \mathcal{Q})$$

ein $\cup$ -Homomorphismus mit $\overset{\circ}{\varphi} \leq \varphi$.

Die Aussage des Hilfssatzes folgt sofort aus dem nachstehenden, rein topologischen Lemma.

2. 8 Lemma:

Sind S und T Teilmengen eines topologischen Raumes X mit $\overset{\circ}{S} = \overline{\overset{\circ}{S}}$ und $T = \overline{T}$, so gilt:

$$\overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T} = \overline{\overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T}}.$$

Beweis:

(1) Natürlich gilt $\hat{S} \cup \hat{T} \subset \overline{\hat{S} \cup T}$.

(2) Es gilt $\overline{\hat{S} \cup T} \setminus T \subset (S \cup T) \setminus T \subset S$
 und weil $\overline{\hat{S} \cup T} \setminus T$ wegen $T = \bar{T}$ offen ist, folgt
 daraus $\overline{\hat{S} \cup T} \setminus T \subset \hat{S}$
 und darum $\overline{\hat{S} \cup T} \subset \hat{S} \cup T$.
 Deshalb ist $\overline{\hat{S} \cup T} \setminus \hat{S} \subset \overline{\hat{S} \cup T} \setminus \hat{S} \subset T$.
 Weil aber $\hat{S} = \bar{S}$ ist, ist $\overline{\hat{S} \cup T} \setminus \hat{S}$ offen und darum
 $\overline{\hat{S} \cup T} \setminus \hat{S} \subset \hat{T}$,

also

$$\overline{\hat{S} \cup T} \subset \hat{S} \cup \hat{T} .$$

2. 9 Hilfssatz:

Sei $(F_i)_{i \in I}$ eine absteigend filtrierende Familie in $OK(X, Y)$.

Dann ist $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ definiert durch

$$F(x) = \bigcap_{i \in I} F_i(x) \quad (x \in X)$$

eine oberhalb-stetige Korrespondenz, so daß für alle $A \in \mathcal{F}(Y)$ gilt:

$$F^{-1}(A) = \bigcap_{i \in I} F_i^{-1}(A) .$$

Beweis:

Da für jedes $x \in X$ $(F_i(x))_{i \in I}$ eine absteigend filtrierende Familie nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen von Y ist und da Y kompakt ist, gilt $F(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$.

Sei nun $A \subset Y$ abgeschlossen. Dann gilt

$$F^{-1}(A) = \{x \in X: \bigcap_{i \in I} F_i(x) \cap A \neq \emptyset\} .$$

Aus dem selben Grund wie oben ist für $x \in X$ genau dann $\bigcap_{i \in I} F_i(x) \cap A \neq \emptyset$, wenn für alle $i \in I$ $F_i(x) \cap A \neq \emptyset$ ist.

Deshalb ergibt sich

$$\begin{aligned} F^{-1}(A) &= \bigcap_{i \in I} \{x \in X: F_i(x) \cap A \neq \emptyset\} \\ &= \bigcap_{i \in I} F_i^{-1}(A) . \end{aligned}$$

Wegen $F_i \in \text{OK}(X, Y)$ ist aber $F_i^{-1}(A)$ für alle $i \in I$ abgeschlossen und deshalb ist auch $F^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Also gilt $F \in \text{OK}(X, Y)$ und für $A \in \mathcal{F}(Y)$ ist

$$F^{-1}(A) = \bigcap_{i \in I} F_i^{-1}(A)$$

Beweis von Satz 2.6:

Sei F eine Boolesche Korrespondenz von X nach Y , die die Bedingung (V) erfüllt. Sei $T \subset \mathcal{O}(Y)$ eine punkt-trennende Teilmenge, so daß für jede Kardinalzahl

$$\kappa < \text{card}(\{S \in T: F^{-1}(S) \cap F^{-1}(\bigcup S) \neq \emptyset\})$$

und für alle $A \in \mathcal{O}(Y)$ gilt:

Ist $K \subset F^{-1}(A) \cap F^{-1}(\bigcup A)$ κ -abgeschlossen, so ist $\overset{\circ}{K}$ abgeschlossen.

Sei Ω die kleinste Ordinalzahl mit

$$\text{card}(\Omega) = \text{card}(\{S \in T: F^{-1}(S) \cap F^{-1}(\bigcup S) \neq \emptyset\})$$

und sei $f: \Omega \rightarrow \{S \in T: F^{-1}(S) \cap F^{-1}(\bigcup S) \neq \emptyset\}$ mit

$$f(\omega) = S_\omega$$

eine Bijektion.

Nach Lemma 1.16 existiert ein $F_1 \in \text{BK}(X, Y)$ mit $F_1 \leq F$

und $F_1^{-1}(S_1) \cap F_1^{-1}(\bigcup S_1) = \emptyset$

Sei $\omega_0 < \Omega$ eine Ordinalzahl, so daß für alle $\omega < \omega_0$ bereits ein $F_\omega \in \text{BK}(X, Y)$ definiert ist mit

$$F^{-1}(S_\omega) \cap F^{-1}(\bigcup S_\omega) = \emptyset$$

und

$$F_{\omega'} \leq F_\omega \quad \text{falls } \omega' \leq \omega.$$

Nach Hilfssatz 2.9 ist dann $H: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ definiert durch

$$H(x) = \bigcap_{\omega < \omega_0} F_\omega(x) \quad (x \in X)$$

eine punktabgeschlossene, oberhalb-stetige Korrespondenz mit

$$H^*(A) = \bigcap_{\omega < \omega_0} F_\omega^*(A)$$

für alle $A \in \mathcal{O}(Y)$.

Sei $A \in \mathcal{O}(Y)$ und $\kappa := \text{card}(\omega_0)$. Dann ist

$$K := H^*(A) \cap F^*(\bigcup A) = \bigcap_{\omega < \omega_0} F_\omega^*(A) \cap F^*(\bigcup A)$$

eine κ -abgeschlossene Menge mit $K \subset F^{-1}(A) \cap F^{-1}(\bigcup A)$ und

$$n < \text{card}(\{S \in \mathcal{T} : F^{-1}(S) \cap F^{-1}(\mathcal{C}(S)) \neq \emptyset\})$$

Nach Voraussetzung ist deshalb K abgeschlossen.

$$\text{Es gilt} \quad H^*(A) = K \cup (H^*(A) \setminus F^*(\mathcal{C}(A)))$$

Weil $H^*(A) \setminus F^*(\mathcal{C}(A))$ und $\hat{K}$ abgeschlossen sind, folgt aus Lemma 2.8:

$$\begin{aligned} \overline{H^*(A)} &= \hat{K} \cup \overline{H^*(A) \setminus F^*(\mathcal{C}(A))} \\ &= \hat{K} \cup (\overline{H^*(A)} \cap \overline{F^*(\mathcal{C}(A))}) \\ &= \hat{K} \cup (\overline{H^*(A)} \setminus F^*(\mathcal{C}(A))) \end{aligned} \quad (*)$$

Für alle $\omega < \omega_0$ ist

$$F_\omega^*(\mathcal{C}(A)) \subset F^*(\mathcal{C}(A)) \quad \text{und daher}$$

$$\{F^*(\mathcal{C}(A)) \subset \{F_\omega^*(\mathcal{C}(A)) \subset F_\omega^*(A)\}$$

Also gilt $\{F^*(\mathcal{C}(A)) \subset H^*(A)$ und darum wegen $\{F^*(\mathcal{C}(A)) \in \mathcal{O}(X)$:

$$\{F^*(\mathcal{C}(A)) \subset \overline{H^*(A)} \quad .$$

Die Gleichung (+) lautet damit

$$\overline{H^*(A)} = \hat{K} \cup \{F^*(\mathcal{C}(A))$$

und $\overline{H^*(A)}$ ist als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen selber abgeschlossen.

Nach Hilfssatz 2.7 gibt es deshalb einen $\cup$ -Homomorphismus $\hat{H}^*: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ mit $\hat{H}^* \leq H^*$.

Nach Satz 1.18 ist dann $G' := (\hat{H}^*)^* \in \text{BK}(X, Y)$ mit $G' \leq H$.

Nach Lemma 1.16 gibt es ein $F_{\omega_0} \in \text{BK}(X, Y)$ mit $F_{\omega_0} \leq G' \leq H$

$$\text{und} \quad F_{\omega_0}^{-1}(S_{\omega_0}) \cap F_{\omega_0}^{-1}(\mathcal{C}(S_{\omega_0})) = \emptyset$$

Insgesamt ist damit nachgewiesen, daß für jedes $\omega < \Omega$ ein $F \in \text{BK}(X, Y)$ existiert mit

- (i) $F_\omega \leq F$
- (ii) $F_\omega \leq F_{\omega'}$ für alle $\omega' \leq \omega$
- (iii) $F_\omega^{-1}(S_\omega) \cap F_\omega^{-1}(\mathcal{C}(S_\omega)) = \emptyset$

Sei nun $G: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ definiert durch

$$G(x) = \bigcup_{\omega < \Omega} F_\omega(x) \quad (x \in X)$$

Nach Hilfssatz 2.9 ist $G \in \text{OK}(X, Y)$ und $G^{-1}(A) = \bigcup_{\omega < \Omega} F_\omega^{-1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{O}(Y)$.

Angenommen es gäbe ein $x \in X$ und $y_1, y_2 \in G(x)$ mit $y_1 \neq y_2$. Dann würde ein $S \in \mathcal{T}$ mit $y_1 \in S$ und $y_2 \notin S$ existieren,

was zur Folge hätte:

$$\begin{aligned} x \in G^{-1}(S) \cap G^{-1}(\bigcup S) &= \bigcap_{\omega < \Omega} F_{\omega}^{-1}(S) \cap \bigcap_{\omega < \Omega} F_{\omega}^{-1}(\bigcup S) \\ &\subset \bigcap_{\omega < \Omega} F_{\omega}^{-1}(S) \cap F_{\omega}^{-1}(\bigcup S) \subset F^{-1}(S) \cap F^{-1}(\bigcup S). \end{aligned}$$

Also wäre $F^{-1}(S) \cap F^{-1}(\bigcup S) \neq \emptyset$, und es gäbe daher ein $\omega < \Omega$ mit $S = S_{\omega}$. Nach Definition ist aber

$$F_{\omega}^{-1}(S_{\omega}) \cap F_{\omega}^{-1}(\bigcup S_{\omega}) = \emptyset,$$

was ein Widerspruch ist.

Für alle $x \in X$ ist demnach $G(x)$ einelementig.

Wegen $G \in \text{OK}(X, Y)$ ist deshalb G eine stetige Abbildung mit $G \leq F$.

Daraus folgt sofort die Aussage des Satzes (vgl. Bemerkung 2.2).

Zum Schluß dieses Paragraphen sollen die Dualisierungen von Satz 2.6 formuliert werden. Dazu wird zunächst die folgende Definition benötigt:

2.10 Definition:

Ein $\cup$ -Homomorphismus $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ erfülle die Bedingung (V*), wenn gilt:

Es gibt ein Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$, so daß für jede Kardinalzahl $\kappa < \text{card}(\{S \in \mathcal{E}: \varphi(S) \cap \varphi(\bigcup S) \neq \emptyset\})$ und jedes $A \in \mathcal{A}$ das von $\varphi(A) \cap \varphi(\bigcup A)$ erzeugte Hauptideal κ -vollständig ist.

2.11 Lemma:

Ein $\cup$ -Homomorphismus $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ erfüllt genau dann die Bedingung (V*), wenn φ^* die Bedingung (V) erfüllt.

Beweis:

Die Aussage des Lemmas folgt unmittelbar aus Satz 1.18, Lemma 2.4 und bekannten Aussagen der Dualitätstheorie von Booleschen Algebren und Räumen (vgl. 0.28 der Vorbereitungen).

Somit ist der folgende Satz eine direkte Konsequenz von Satz 2.6:

2.12 Satz:

Erfüllt $\varphi \in \text{VH}(\mathcal{A}, \mathbb{L})$ die Bedingung (V^*) , so gibt es eine Verschärfung von φ .

Schließlich seien noch die analogen Resultate für α -Homomorphismen zusammengestellt:

2.13 Definition:

Ein α -Homomorphismus $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{L}$ erfülle die Bedingung (V_α) , wenn gilt:

Es gibt ein Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$, so daß für jede Kardinalzahl $\kappa < \text{card}(\{S \in \mathcal{E}: \varphi(S) \cup \varphi(\bigcup S) \neq 1\})$ und jedes $A \in \mathcal{A}$ das von $\bigcup (\varphi(A) \cup \varphi(\bigcup A))$ erzeugte Hauptideal κ -vollständig ist.

2.14 Lemma:

Ein α -Homomorphismus $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{L}$ erfüllt genau dann die Bedingung (V_α) , wenn φ_α die Bedingung (V) erfüllt.

Beweis:

Wegen $\varphi_\alpha = (\varphi')^*$ ist das Lemma eine direkte Folgerung aus Lemma 2.11.

Aus Satz 2.6 folgt daher sofort:

2.15 Satz:

Erfüllt $\varphi \in \text{DH}(\mathcal{A}, \mathbb{L})$ die Bedingung (V_α) , so gibt es eine Verschärfung von φ .

Teil II: ANWENDUNGEN AUF FORTSETZUNGS- UND LIFTINGPROBLEME
BEI BOOLESCHEN ALGEBREN UND RÄUMEN

§ 3. Verallgemeinerung der VON NEUMANN-STONESchen Liftingsätze

In [17] geben VON NEUMANN und STONE hinreichende Bedingungen dafür an, daß für eine Boolesche Algebra $\mathcal{A}$ und ein Ideal $\mathcal{u} \subset \mathcal{A}$ das Liftingproblem lösbar ist.

Unter ähnlichen Voraussetzungen wie in [17] sollen in diesem Paragraphen allgemeinere Liftingaussagen bewiesen werden. Dabei sind die in § 1 entwickelte Dualitätstheorie sowie der in § 2 bewiesene Schnittsatz und seine Dualisierungen die wichtigsten Hilfsmittel.

3. 1 Definition:

Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ Boolesche Algebren, $\mathcal{u}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$, $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{u}$ die Quotientenabbildung und $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{u}$ ein Boolescher Homomorphismus.

Ein Boolescher Homomorphismus $\hat{\varphi}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ heißt Lifting von φ , falls gilt: $\pi \circ \hat{\varphi} = \varphi$.

Die Frage nach der Existenz einer Lifting für einen Booleschen Homomorphismus wird als Liftingproblem für Boolesche Algebren bezeichnet.

Spezialfall:

Ist $\mathcal{L} = \mathcal{A}/\mathcal{u}$ und $\varphi = \text{id}_{\mathcal{A}/\mathcal{u}}$, so heißt jede Lifting $\hat{\varphi}$ von φ ein Lifting von $\mathcal{A}$ bezüglich $\mathcal{u}$.

Das Problem der Existenz eines Liftings wird spezielles Liftingproblem für Boolesche Algebren genannt.

Ist $\psi: \mathcal{A}/\mathcal{u} \rightarrow \mathcal{A}$ ein $\mathcal{u}$ -Homomorphismus (bzw. $\mathcal{u}$ -Homomorphismus) mit $\pi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{A}/\mathcal{u}}$, so heißt ψ obere (bzw. untere) Dichte von $\mathcal{A}$ bezüglich $\mathcal{u}$.

Aus der Stoneschen Dualitätstheorie ist bekannt, daß man den Booleschen Darstellungsraum einer Quotientenalgebra in kanonischer Weise als abgeschlossenen Unterraum des zur Ausgangsalgebra dualen Booleschen Raums auffassen kann (vgl. 0.28 der Vorbereitungen). Deshalb läßt sich das Liftingproblem für Boolesche Algebren folgendermaßen dualisieren:

Seien X und Y Boolesche Räume, Z ein abgeschlossener Unterraum von X und $f: Z \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Die Frage, ob eine Fortsetzung $\tilde{f}: X \longrightarrow Y$ von f existiert, wird als Fortsetzungsproblem für Boolesche Räume bezeichnet.

Dem Liftingproblem entspricht also dual das Fortsetzungsproblem.

Dem speziellen Liftingproblem entspricht dual die Frage nach der Existenz einer stetigen Abbildung $g: X \longrightarrow Z$ mit $g|_Z = \text{id}_Z$.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß in besonderen Fällen das Liftingproblem für Boolesche Algebren schon dann lösbar ist, wenn eine "schwache" Lösung in Form eines ν - oder $\cap$ -Homomorphismus existiert. Durch Dualisierung dieser Aussage folgt, daß die Existenz einer stetigen Fortsetzung für eine stetige Abbildung zwischen Booleschen Räumen oft schon dann gesichert ist, wenn eine "Fortsetzung" in Form einer Booleschen Korrespondenz existiert.

3. 2 Lemma:

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ Boolesche Algebren, $\mathcal{M}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$, $\pi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$ die Quotientenabbildung und $\varphi: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$ ein Boolescher Homomorphismus.

Ist $\psi: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein ν - (bzw. $\cap$ -) Homomorphismus mit

$\pi \circ \psi = \varphi$, so gilt auch für jede Verschärfung χ von ψ :

$$\pi \circ \chi = \varphi.$$

Beweis:

Es wird hier nur der Fall behandelt, in dem ψ ein σ -Homomorphismus ist. Für σ -Homomorphismen verläuft der Beweis aber analog.

Sei χ eine Verschärfung von ψ und $B \in \mathcal{L}$.

Dann ist $\chi(B) \subset \psi(B)$ und deshalb $\pi(\chi(B)) \subset \pi(\psi(B)) = \varphi(B)$.

Außerdem gilt $\chi(\{B\}) \subset \psi(\{B\})$ und darum

$$\pi(\chi(B)) = \pi(\chi(\{B\})) \supset \pi(\psi(\{B\})) = \pi(\psi(\{B\})) = \varphi(B) \quad .$$

Also ist $\pi \circ \chi = \varphi$.

3.3 Satz:

Es seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{L}$ Boolesche Algebren, κ ein für alle $k < \text{card}(\mathcal{L})$ bedingt k -vollständiges Ideal in $\mathcal{O}$, $\pi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\kappa$ die Quotientenabbildung und $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}/\kappa$ ein Boolescher Homomorphismus.

Genau dann existiert eine Liftung $\hat{\varphi}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}$ von φ , wenn es einen σ - (bzw. σ -) Homomorphismus $\psi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}$ mit

$$\pi \circ \psi = \varphi$$

gibt.

Beweis:

(1) Da jede Liftung $\hat{\varphi}$ von φ nach Definition ein σ - und σ -Homomorphismus ist, ist die eine Richtung des Satzes trivial.

(2) Sei nun $\psi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}$ ein σ -Homomorphismus mit $\pi \circ \psi = \varphi$ und $B \in \mathcal{L}$. Dann ist

$$\pi(\psi(B) \cap \psi(\{B\})) = \pi(\psi(B)) \cap \pi(\psi(\{B\})) = \varphi(B) \cap \varphi(\{B\}) = 0 \quad .$$

Also ist $\psi(B) \cap \psi(\{B\}) \in \kappa$. Da κ für $k < \text{card}(\mathcal{L})$ bedingt k -vollständig ist, ist - nach Definition der bedingten k -Vollständigkeit - das von $\psi(B) \cap \psi(\{B\})$ erzeugte Hauptideal k -vollständig.

Insgesamt ist damit nachgewiesen, daß ψ die Bedingung (V*) erfüllt. Nach Satz 2.12 existiert daher eine Verschärfung $\hat{\psi}$ von ψ , die nach Lemma 3.2 eine Liftung von φ ist.

Für σ -Homomorphismen verläuft der Beweis analog.

3. 4 Bemerkung:

Satz 3.3 wurde für den Fall $\mathfrak{L} = \mathcal{A}/\mathfrak{u}$ und $\varphi = \text{id}_{\mathcal{A}/\mathfrak{u}}$ mit anderen Methoden zuerst von STONE und VON NEUMANN in [17] bewiesen.

3. 5 Satz: (Dualisierung von Satz 3.3)

Seien X und Y Boolesche Räume, Z ein abgeschlossener Unterraum von X , so daß für jede Kardinalzahl $\kappa < \text{card}(\mathcal{O}(Y))$ und jede κ -abgeschlossene Menge $K \subset X \setminus Z$ das Innere $\overset{\circ}{K}$ von K abgeschlossen ist, und $f: Z \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es genau dann eine stetige Fortsetzung $f: X \rightarrow Y$ von f , wenn eine Boolesche Korrespondenz F von X nach Y mit $f(z) = F(z)$ für alle $z \in Z$ existiert.

Beweis:

- (1) Da jede stetige Fortsetzung $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ von f eine Boolesche Korrespondenz mit den geforderten Eigenschaften ist, ist die eine Richtung des Satzes trivial.
- (2) Sei $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ eine Boolesche Korrespondenz mit $F(z) = f(z)$ für alle $z \in Z$. Sei $B \in \mathcal{O}(Y)$, $\kappa < \text{card}(\mathcal{O}(Y))$ und $K \subset F^{-1}(B) \cap F^{-1}(\complement B)$ eine κ -abgeschlossene Menge. Wegen $K \subset F^{-1}(B) \cap F^{-1}(\complement B) = \{x \in X: F(x) \cap B \neq \emptyset \text{ und } F(x) \cap \complement B \neq \emptyset\} \subset X \setminus Z$ ist $\overset{\circ}{K}$ nach Voraussetzung abgeschlossen. Also erfüllt F die Bedingung (V), und nach Satz 2.6 existiert ein stetiger Schnitt $\tilde{f}$ für F .
Es ist klar, daß $\tilde{f}$ eine stetige Fortsetzung von f ist.

Jetzt sollen noch einige Spezialfälle von Satz 3.3 behandelt werden:

3. 6 Korollar: (GAPAILLARD [5])

Sei X eine nicht-leere Menge, $\mathcal{A}$ eine Unterlgebra von $\mathcal{P}(X)$ und $\mathfrak{u} \subset \mathcal{A}$ ein Ideal in $\mathcal{P}(X)$.

Genau dann gibt es ein Lifting von $\mathcal{A}$ bzgl. $\mathfrak{u}$, wenn eine obere (bzw. untere) Dichte von $\mathcal{A}$ bzgl. $\mathfrak{u}$ existiert.

Beweis:

Das Korollar ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.3, weil $\mathcal{N}$ mit N auch jede Teilmenge von N enthält, also bedingt vollständig ist.

Hier soll aber für die nicht-triviale Richtung noch ein weiterer, sehr einfacher Beweis angegeben werden:

Sei $\psi: \mathcal{A}/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ eine untere Dichte und $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$ die Quotientenabbildung.

Für $x \in X$ sei $\mathcal{F}_x := \{B \in \mathcal{A}/\mathcal{M}: x \in \psi(B)\}$. Weil ψ n -Homomorphismus ist, ist $\mathcal{F}_x$ ein Filter in $\mathcal{A}/\mathcal{M}$. Mit Hilfe des Auswahlaxioms wählt man für jedes $x \in X$ einen Ultrafilter $\mathcal{U}_x$ in $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ mit $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{U}_x$.

Sei nun $\varphi: \mathcal{A}/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$\varphi(B) = \{x \in X: B \in \mathcal{U}_x\} \quad (B \in \mathcal{A}/\mathcal{M}) \quad .$$

Wie man leicht nachrechnet, ist φ ein Boolescher Homomorphismus.

Sei $B \in \mathcal{A}/\mathcal{M}$ und $x \in \psi(B)$. Dann ist $B \in \mathcal{F}_x \subset \mathcal{U}_x$, also $x \in \varphi(B)$. Demnach gilt:

$$\psi(B) \subset \varphi(B) = \bigcup \{\varphi(B) : B \in \mathcal{U}_x\} \quad .$$

Weil nun $\pi(\psi(B) \setminus \varphi(B)) = (\pi(\psi(B))) \setminus \pi(\varphi(B)) = 0$ ist, folgt

$$\psi(B) \setminus \varphi(B) \in \mathcal{M} ,$$

und daher nach Voraussetzung

$$\psi(B) \setminus \varphi(B) \in \mathcal{N} \quad .$$

Deshalb ist auch $\varphi(B) = \psi(B) \cup (\psi(B) \setminus \varphi(B)) \in \mathcal{A}$,

und es gilt $\pi \circ \varphi(B) = B$.

3. 7 Bemerkung:

Die Aussage von Korollar 3.6 wird von GAPAILLARD in [3] mit anderen Methoden direkt bewiesen.

Bevor noch ein weiteres Korollar von Satz 3.3 formuliert wird, sei an folgende topologische Begriffe erinnert:

3. 8 Definition:

Es sei X ein topologischer Raum.

Eine Menge $N \subset X$ heißt nirgends dicht, falls gilt: $\overline{N}^\circ = \emptyset$.

Eine Menge $K \subset X$ heißt von 1. Kategorie, wenn sie die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist; sonst von 2. Kategorie.

Eine Menge $B \subset X$ hat die Bairesche Eigenschaft, wenn eine offene Menge U existiert, so daß $B \Delta U$ von 1. Kategorie ist.

Mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X)$ werde das System der Mengen mit Bairescher Eigenschaft, mit $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1(X)$ das System der Mengen von 1. Kategorie in X bezeichnet.

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt regulär-offen, wenn $U = \overline{U}^\circ$ ist.

Ein topologischer Raum X heißt Bairesch, wenn in X jede offene Menge von 2. Kategorie ist.

3. 9 Bemerkung:

(i) Für jeden topologischen Raum X ist $\mathfrak{L}(X)$ eine σ -Unteralgebra von $\mathcal{P}(X)$. Falls X von 2. Kategorie ist, ist $\mathfrak{L}_1(X)$ ein (echtes) σ -Ideal in $\mathcal{P}(X)$ und - wegen $\mathfrak{L}_1(X) \subset \mathfrak{L}(X)$ - natürlich auch in $\mathfrak{L}(X)$.

(ii) Ist X ein Bairescher topologischer Raum, so gibt es zu jedem $B \in \mathfrak{L}(X)$ genau eine regulär-offene Menge U mit $B \Delta U \in \mathfrak{L}_1(X)$.

Außerdem gilt stets, daß der Durchschnitt zweier regulär-offener Mengen wieder regulär offen ist.

3.10 Korollar: (Existenz eines Baireschen Liftings)

Sei X ein Bairescher topologischer Raum.

Dann gibt es ein Lifting von $\mathfrak{L}(X)$ bezüglich $\mathfrak{L}_1(X)$.

Beweis:

Sei $\varphi: \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$ die Abbildung, die jeder Restklasse die eindeutig bestimmte regulär-offene Menge zuordnet, die in dieser Restklasse liegt. Wie man sich sofort klar macht, folgt aus 3.9 (ii), daß φ eine untere Dichte ist.

Somit ist die Behauptung des Korollars wegen 3.9 (i) eine direkte Konsequenz aus Korollar 3.6.

3.11 Bemerkung:

- (i) Korollar 3.10 wurde vom Verfasser in [5] direkt bewiesen. Die dabei verwendeten Methoden gaben den Anstoß zu den Überlegungen in dieser Arbeit.

Hier eine Skizze des einfachen Beweises:

Für $x \in X$ sei $\mathcal{f}_x := \{\tilde{B} \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_1 : \text{Es gibt eine offene Menge } U \in \tilde{B} \text{ mit } x \in U\}$.

Wie man leicht sieht, ist $\mathcal{f}_x$ ein Filter in $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_1$.

Nach dem Auswahlaxiom gibt es für jedes $x \in X$ einen

Ultrafilter $\mathcal{U}_x$ in $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_1$ mit $\mathcal{f}_x \subset \mathcal{U}_x$.

$\varphi: \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $\varphi(B) = \{x \in X: B \in \mathcal{U}_x\}$ ist das gesuchte Lifting.

- (ii) Schließlich sei noch erwähnt, daß das Korollar 3.10 richtig bleibt, wenn von dem topologischen Raum X nur verlangt wird, daß er von 2. Kategorie ist (vgl. [5]).

Anhang zu § 3:

In einem Anhang zu diesem Paragraphen sollen nun noch verwandte Lifting- und Fortsetzungs-probleme für Boolesche Algebren und Räume behandelt werden, auch wenn sie keine direkten Folgerungen aus der im ersten Teil der Arbeit entwickelten Theorie sind.

Der folgende Hilfssatz wird zum Beispiel von HALMOS in [8] bewiesen.

3.12 Hilfssatz:

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Boolesche Algebren, $\mathcal{A}_0$ Unteralgebra von $\mathcal{A}$ und $\varphi: \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{B}$ ein Boolescher Homomorphismus. Sei $A_0 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ die von $\mathcal{A}_0 \cup \{A_0\}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{A}$ und $B_0 \in \mathcal{B}$ mit $\varphi(A) \subset B_0 \subset \varphi(A')$ für alle $A, A' \in \mathcal{A}_0$ mit $A \subset A_0 \subset A'$.

Dann wird durch

$\varphi_1((A_1 \cap A_0) \cup (A_2 \setminus A_0)) := (\varphi(A_1) \cap B_0) \cup (\varphi(A_2) \setminus B_0)$
mit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_0$ ein Boolescher Homomorphismus

$$\varphi_1: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$$

mit $\varphi_1|_{\mathcal{A}_0} = \varphi$ definiert.

Beweis:

Da $\mathcal{A}_1 = \{(A_1 \cap A_0) \cup (A_2 \setminus A_0) : A_1, A_2 \in \mathcal{A}_0\}$ ist (vgl. 0.14 der Vorbereitungen), ist φ_1 auf ganz $\mathcal{A}_1$ definiert.

(1) Behauptung: φ_1 ist wohldefiniert.

Beweis: Sei $(A_1 \cap A_0) \cup (A_2 \setminus A_0) = (A'_1 \cap A_0) \cup (A'_2 \setminus A_0)$ mit $A_1, A_2, A'_1, A'_2 \in \mathcal{A}_0$. Dann ist $A_2 \setminus A_0 = A'_2 \setminus A_0$, also

$$A_2 \setminus A'_2 \subset A_0 \quad \text{und} \quad A'_2 \setminus A_2 \subset A_0$$

Nach Voraussetzung gilt deshalb

$$\varphi(A_2) \setminus \varphi(A'_2) = \varphi(A_2 \setminus A'_2) \subset B_0$$

$$\text{und} \quad \varphi(A'_2) \setminus \varphi(A_2) = \varphi(A'_2 \setminus A_2) \subset B_0,$$

was wiederum

$$\varphi(A_2) \setminus B_0 = \varphi(A'_2) \setminus B_0$$

zur Folge hat.

Außerdem ist $A_1 \cap A_0 = A'_1 \cap A_0$, also

$$A_0 \subset A_1 \cup \overline{A'_1} \quad \text{und} \quad A_0 \subset A'_1 \cup \overline{A_1} \quad .$$

Daraus folgt:

$$B_0 \subset \varphi(A_1 \cup \overline{A'_1}) = \varphi(A_1) \cup \overline{\varphi(A'_1)}$$

$$\text{und} \quad B_0 \subset \varphi(A'_1 \cup \overline{A_1}) = \varphi(A'_1) \cup \overline{\varphi(A_1)},$$

$$\text{d. h. aber} \quad \varphi(A_1) \cap B_0 = \varphi(A'_1) \cap B_0 \quad .$$

Insgesamt folgt so:

$$(\varphi(A_1) \cap B_0) \cup (\varphi(A_2) \setminus B_0) = (\varphi(A_1') \cap B_0) \cup (\varphi(A_2') \setminus B_0),$$

also die Behauptung.

(2) Behauptung: φ_1 ist ein Boolescher Homomorphismus.

Beweis: Seien $A_1, A_2, A_1', A_2' \in \mathcal{A}_0$,

$$A := (A_1 \cap A_0) \cup (A_2 \setminus A_0) \text{ und } A' := (A_1' \cap A_0) \cup (A_2' \setminus A_0).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (i) \quad \varphi_1(A) \cap \varphi_1(A') &= \\ &= ((\varphi(A_1) \cap B_0) \cup (\varphi(A_2) \setminus B_0)) \cap ((\varphi(A_1') \cap B_0) \cup (\varphi(A_2') \setminus B_0)) \\ &= (\varphi(A_1) \cap \varphi(A_1') \cap B_0) \cup (\varphi(A_2) \cap \varphi(A_2') \setminus B_0) \\ &= \varphi_1((A_1 \cap A_1' \cap A_0) \cup (A_2 \cap A_2' \setminus A_0)) \\ &= \varphi_1(A \cap A') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \varphi_1(A) &= \\ &= (\varphi(A_1) \cup \varphi(B_0)) \cap (\varphi(A_2) \cup B_0) \\ &= (\varphi(\varphi(A_1)) \cup \varphi(B_0)) \cap (\varphi(\varphi(A_2)) \cup B_0) \\ &= (\varphi(\varphi(A_1) \cap \varphi(\varphi(A_2))) \cup (\varphi(\varphi(A_2)) \setminus B_0) \cup (\varphi(\varphi(A_1)) \cap B_0)) \\ &= (\varphi(\varphi(A_1)) \cap B_0) \cup (\varphi(\varphi(A_2)) \setminus B_0) \\ &= \varphi_1((\varphi(A_1) \cap B_0) \cup ((\varphi(A_2)) \setminus B_0)) \\ &= \varphi_1(\varphi(A)) \end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) folgt die Behauptung.

3.13 Satz:

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Boolesche Algebren, $\mathfrak{m}$ ein für jedes $k < \text{card}(\mathcal{B})$ k -vollständiges Ideal in $\mathcal{A}$, $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{m}$ die Quotientenabbildung und $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{m}$ ein Boolescher Homomorphismus.

Dann gibt es eine Liftung $\tilde{\varphi}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ von φ .

Beweis:

Sei Ω die kleinste Ordinalzahl mit $\text{card}(\Omega) = \text{card}(\mathcal{B})$.

Dann existiert eine Bijektion $\Omega \longrightarrow \mathcal{K}$ mit $B_1 = 0$.
 $\omega \longmapsto B_\omega$

Für $\omega < \Omega$ bezeichne $\mathcal{K}_\omega$ die von $\{B_{\omega'} : \omega' < \omega\}$ in $\mathcal{K}$ erzeugte Unterualgebra. Es gilt $\mathcal{K}_1 = \{0, 1\}$.

Sei $\varphi_1 : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{A}$ definiert durch
 $\varphi_1(0) = 0$ und $\varphi_1(1) = 1$.

Dann ist φ_1 ein Boolescher Homomorphismus mit

$$\pi \circ \varphi_1 = \varphi|_{\mathcal{K}_1}$$

Sei nun $\omega_0 < \Omega$, so daß für alle $\omega < \omega_0$

$$\varphi_\omega : \mathcal{K}_\omega \longrightarrow \mathcal{A}$$

bereits definiert ist und gilt:

(i) φ_ω ist ein Boolescher Homomorphismus.

$$(ii) \quad \pi \circ \varphi_\omega = \varphi|_{\mathcal{K}_\omega}$$

$$(iii) \quad \varphi_\omega|_{\mathcal{K}_{\omega'}} = \varphi_{\omega'} \quad \text{für alle } \omega' < \omega$$

Sei $\mathcal{K}'_{\omega_0}$ die von $\{B_{\omega'} : \omega' < \omega_0\}$ erzeugte Unterualgebra von $\mathcal{K}$.

Dann ist $\mathcal{K}_{\omega_0}$ die von $\mathcal{K}'_{\omega_0} \cup \{B_{\omega_0}\}$ erzeugte Unterualgebra von $\mathcal{K}$.

Außerdem wird durch $\varphi(B) := \varphi_\omega(B)$ falls $B \in \mathcal{K}_\omega$ für $\omega < \omega_0$
 ein Boolescher Homomorphismus $\varphi : \mathcal{K}'_{\omega_0} \longrightarrow \mathcal{A}$ mit

$$\pi \circ \varphi = \varphi|_{\mathcal{K}'_{\omega_0}}$$

definiert.

Es gibt ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\pi(A) = \varphi(B_{\omega_0})$.

Sei $N_1 := \bigcup_{B \in \mathcal{T}} A \setminus \varphi(B)$ mit
 $\mathcal{T} := \{B \in \mathcal{K}'_{\omega_0} : B_{\omega_0} \subset B\}$.

Die Mächtigkeit von $\mathcal{T}$ ist entweder endlich oder $\leq \text{card}(\omega_0)$; denn

$\mathcal{T} \subset \mathcal{K}'_{\omega_0}$ und $\mathcal{K}'_{\omega_0}$ geht durch Bildung von Komplementen, endlichen Vereinigungen und Durchschnitten aus $\{B_{\omega'} : \omega' < \omega_0\}$ hervor (vgl. O.14 der Vorbereitungen).

Also ist $\text{card}(\mathcal{T}) < \text{card}(\mathcal{K})$.

Außerdem gilt für $B \in \mathcal{T}$:

$$\pi(A) = \varphi(B_{\omega_0}) \subset \varphi(B) = \pi(\varphi(B)),$$

also

$$A \setminus \varphi(B) \in \mathcal{M}$$

Nach Voraussetzung über $\mathcal{M}$ existiert daher $\bigcup_{B \in \mathcal{T}} A \setminus \varphi(B)$ in $\mathcal{M}$.

Genauso zeigt man, daß

$$N_2 := \bigcup_{B \in \mathcal{T}} \mathcal{A}(\psi(B) \sim A)$$

mit

$$\mathcal{T} := \{B \in \mathcal{B}'_{\omega_0} : B \subset B_{\omega_0}\}$$

in ω existiert.

Sei $A_0 := (A \setminus N_1) \cup N_2$. Dann ist $\pi(A_0) = \pi(A) = \varphi(B_{\omega_0})$.

(1) Behauptung: Für alle $B \in \mathcal{T}$ gilt $\psi(B) \subset A_0$.

Beweis: Sei $B \in \mathcal{T}$. Für alle $C \in \mathcal{T}$ gilt dann

$B \subset C$ und damit $\psi(B) \subset \psi(C)$,

also $A \setminus \psi(B) \supset A \setminus \psi(C)$

und daher $A \setminus \psi(B) \supset N_1$, d.h. $A \cap \psi(B) \subset A \setminus N_1$.

Andererseits ist $\psi(B) \setminus A \subset N_2$, so daß insgesamt folgt:

$$\psi(B) \subset (A \setminus N_1) \cup N_2 = A_0.$$

(2) Behauptung: Für alle $B \in \mathcal{T}$ gilt $A_0 \subset \psi(B)$.

Beweis: Sei $B \in \mathcal{T}$. Für alle $C \in \mathcal{T}$ gilt dann

$C \subset B$ und damit $\psi(C) \subset \psi(B)$,

also $\psi(C) \setminus A \subset \psi(B) \setminus A$,

d.h. aber $N_2 \subset \psi(B) \setminus A$.

Andererseits ist $A \setminus \psi(B) \subset N_1$, also $A \setminus N_1 \subset \psi(B)$.

Daraus folgt:

$$A_0 := (A \setminus N_1) \cup N_2 \subset \psi(B).$$

Sei $\psi_{\omega_0}: \mathcal{B}'_{\omega_0} \rightarrow \mathcal{A}$ definiert durch

$$\psi_{\omega_0}((B \cap B_{\omega_0}) \cup (B' \setminus B_{\omega_0})) = (\psi(B) \cap A_0) \cup (\psi(B') \setminus A_0)$$

mit $B, B' \in \mathcal{B}'_{\omega_0}$.

Wegen (1) und (2) ist ψ_{ω_0} nach Hilfssatz 3.12 ein Boole-scher Homomorphismus mit $\psi_{\omega_0}|_{\mathcal{B}'_{\omega_0}} = \psi$, d.h. $\psi_{\omega_0}|_{\mathcal{B}'_{\omega_0}} = \psi_{\omega}$ falls $\omega < \omega_0$.

(3) Behauptung: $\pi \circ \psi_{\omega_0} = \varphi|_{\mathcal{B}'_{\omega_0}}$

Beweis: Sei $C \in \mathcal{B}'_{\omega_0}$. Dann existieren $B, B' \in \mathcal{B}'_{\omega_0}$ mit

$$C = (B \cap B_{\omega_0}) \cup (B' \setminus B_{\omega_0}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Es gilt: } \pi \circ \psi_{\omega_0}(C) &= \pi((\psi(B) \cap A_0) \cup (\psi(B') \setminus A_0)) \\
 &= (\psi(B) \cap \psi(B_{\omega_0})) \cup (\psi(B') \setminus \psi(B_{\omega_0})) \\
 &= \psi((B \cap B_{\omega_0}) \cup (B' \setminus B_{\omega_0})) \\
 &= \psi(C)
 \end{aligned}$$

Also ist für alle $\omega < \Omega$ eine Abbildung $\psi_\omega: \mathcal{L}_\omega \rightarrow \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften (i) bis (iii) definiert.

Außerdem gilt: $\bigcup_{\omega < \Omega} \mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}$.

Sei $\hat{\psi}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ definiert durch

$$\hat{\psi}(B) = \psi_\omega(B), \quad \text{falls } B \in \mathcal{L}_\omega \text{ mit } \omega < \Omega.$$

Dann ist $\hat{\psi}$ - wie man sofort sieht - eine Liftung von ψ .

3.14 Bemerkung:

Die Aussage von Satz 3.13 wird für den Spezialfall $\mathcal{L} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ und $\psi = \text{id}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}$ mit anderen Methoden schon von STONE und VON NEUMANN in [17] bewiesen.

Um einen Satz von HALMOS über projektive Boolesche Algebren als Folgerung von Satz 3.13 formulieren zu können, sei hier kurz an die Definition der projektiven Booleschen Algebren erinnert:

3.15 Definition:

Eine Boolesche Algebra $\mathcal{L}$ heißt projektiv, wenn für jede Boolesche Algebra $\mathcal{A}$, jedes Ideal $\mathcal{N}$ in $\mathcal{A}$ und jeden Booleschen Homomorphismus $\psi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine Liftung $\hat{\psi}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ existiert.

3.16 Korollar: (HALMOS [7])

Jede abzählbare Boolesche Algebra ist projektiv.

Beweis:

Das Korollar ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 3.13.

3.17 Bemerkung:

- (i) Da jede abzählbar erzeugte Boolesche Algebra abzählbar ist, kann man das Korollar 3.16 auch wie folgt formulieren:

Jede abzählbar erzeugte Boolesche Algebra ist projektiv.

- (ii) HALMOS zeigt in [7], daß die projektiven Booleschen Algebren genau die Retrakte der freien Booleschen Algebren sind.

Insbesondere ist also jede abzählbare Boolesche Algebra Retrakt einer freien Booleschen Algebra

3.18 Definition:

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra.

Eine Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ heißt dicht, wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \neq 0$ ein $D \in \mathcal{D}$ existiert mit $D \neq 0$ und $D \subset A$.

$\mathcal{A}$ heißt separabel, wenn es eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

3.19 Korollar:

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche σ -Algebra, $\mathcal{M}$ ein σ -Ideal in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ eine separable Boolesche Algebra.

Dann existiert eine untere (obere) Dichte für $\mathcal{A}$ bzgl. $\mathcal{M}$.

Beweis:

Sei $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$ die Quotientenabbildung, $\mathcal{D}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ und $\mathcal{L}$ die von $\mathcal{D}$ erzeugte Unter algebra von $\mathcal{A}/\mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{L}$ abzählbar, und daher gibt es nach Satz 3.13 einen Booleschen Homomorphismus $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ mit $\pi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{L}}$.

Sei $\psi: \mathcal{A}/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ definiert durch

$$\psi(B) = \bigcup_{S \in \mathcal{T}_B} \varphi(S) \quad \text{mit } \mathcal{T}_B := \{S \in \mathcal{L} : S \subset B\} \quad (B \in \mathcal{A}/\mathcal{M}).$$

Weil $\mathcal{T}_B$ für $B \in \mathcal{A}/\mathcal{M}$ höchstens abzählbar ist, ist ψ eine wohldefinierte Abbildung.

Für $B_1, B_2 \in \mathcal{A}/\mathcal{M}$ gilt:

$$\begin{aligned}\psi(B_1) \cap \psi(B_2) &= \left(\bigcup_{S \in \mathcal{T}_{B_1}}^{\mathcal{A}} \varphi(S) \right) \cap \left(\bigcup_{S' \in \mathcal{T}_{B_2}}^{\mathcal{A}} \varphi(S') \right) \\ &= \bigcup_{S \in \mathcal{T}_{B_1}, S' \in \mathcal{T}_{B_2}}^{\mathcal{A}} \varphi(S \cap S') \subset \\ &\subset \bigcup_{S \in \mathcal{T}_{B_1 \cap B_2}}^{\mathcal{A}} \varphi(S) = \psi(B_1 \cap B_2) \subset \\ &\subset \left(\bigcup_{S \in \mathcal{T}_{B_1}}^{\mathcal{A}} \varphi(S) \right) \cap \left(\bigcup_{S' \in \mathcal{T}_{B_2}}^{\mathcal{A}} \varphi(S') \right) = \psi(B_1) \cap \psi(B_2),\end{aligned}$$

weil $\{S \cap S' : S \in \mathcal{T}_{B_1}, S' \in \mathcal{T}_{B_2}\} \subset \mathcal{T}_{B_1 \cap B_2} \subset \mathcal{T}_{B_1} \cap \mathcal{T}_{B_2}$ ist.

Außerdem ist $\psi(0) = 0$ und $\psi(1) = 1$.

Deshalb ist ψ ein σ -Homomorphismus.

Sei $B \in \mathcal{A}/\mathcal{M}$. Dann gilt $B = \bigcup_{S \in \mathcal{T}_B}^{\mathcal{A}/\mathcal{M}} S$, denn angenommen es

wäre $\bigcup_{S \in \mathcal{T}_B}^{\mathcal{A}/\mathcal{M}} S =: C \neq B$, d.h. $C \not\subseteq B$, also $B \setminus C \neq \emptyset$, dann

gäbe es ein $B' \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$ mit $B' \subset B \setminus C \subset B$, im Widerspruch zur Definition von C .

Außerdem gilt:

$$\pi(\psi(B)) = \pi\left(\bigcup_{S \in \mathcal{T}_B}^{\mathcal{A}} \varphi(S)\right) = \bigcup_{S \in \mathcal{T}_B}^{\mathcal{A}/\mathcal{M}} \pi(\varphi(S)) = \bigcup_{S \in \mathcal{T}_B}^{\mathcal{A}/\mathcal{M}} S = B.$$

Also ist ψ eine untere Dichte von $\mathcal{A}$ bzgl. $\mathcal{M}$.

(ψ' ist eine obere Dichte von $\mathcal{A}$ bzgl. $\mathcal{M}$.)

Schließlich seien noch -ohne weitere Erläuterungen- die Dualisierungen von einigen der vorher bewiesenen Resultate formuliert:

3.20 Satz: (Dualisierung von Satz 3.13)

Seien X und Y Boolesche Räume, Z ein abgeschlossener Unterraum von X und $f: Z \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Für jedes $k < \text{card}(\mathcal{A}(Y))$ und jede in X k -offene Menge $U \subset X \setminus Z$ sei $\bar{U}$ offen und $\bar{U} \subset X \setminus Z$.

Dann gibt es eine stetige Abbildung $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ mit $\tilde{f}|_Z = f$.

3.21 Definition:

Ein Boolescher Raum Y heißt injektiv, wenn für jeden Booleschen Raum X , für jeden abgeschlossenen Unterraum Z von X und für jede stetige Abbildung $f: Z \longrightarrow Y$ eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}: X \longrightarrow Y$ existiert.

3.22 Korollar:

Jeder metrisierbare Boolesche Raum ist injektiv.

Beweis:

Da für kompakte Räume Metrisierbarkeit und Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie äquivalent sind, folgt die Aussage des Korollars sofort aus Satz 3.20.

3.23 Bemerkung:

Korollar 3.22 formuliert genau die zu Korollar 3.16 duale Aussage.

§ 4. Ein Existenzsatz für untere Dichten von endlichen Maßen
und ein neuer Beweis des Liftingsatzes für vollständige
endliche Maße

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, einen neuen Beweis des Liftingsatzes der Maßtheorie anzugeben. Er unterscheidet sich dadurch von allen dem Verfasser bekannten Beweisen, daß dieser Beweis nur elementare Hilfsmittel aus der Maßtheorie benutzt (Satz von Radon-Nikodym, Approximationsatz für endliche Maße). - Es stellt sich heraus, daß jeder endliche Maßraum eine untere und damit auch eine obere Dichte besitzt. Mit Hilfe der in § 3 entwickelten Theorie läßt sich aus dieser Tatsache sofort ableiten, daß jeder vollständige endliche Maßraum ein Lifting besitzt.

Zunächst seien ohne Beweis einige bekannte Resultate aus der Maßtheorie zusammengestellt:

4. 1 Satz: (Approximationssatz für endliche Maße)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ eine Unter-
 algebra und $\mathcal{L}$ die von $\mathcal{L}$ erzeugte σ -Unter-
 algebra von $\mathcal{A}$.
 Dann gibt es zu jedem $B \in \mathcal{L}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C \in \mathcal{L}$
 mit $\mu(C \Delta B) < \varepsilon$.

4. 2 Satz: (Bedingte Erwartung)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $\mathcal{L}$ eine σ -Unter-
 algebra von $\mathcal{A}$.
 Dann gibt es zu jedem $A \in \mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$ -meßbare, μ -integrier-
 bare Funktion $f^A: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_B f^A d\mu = \mu(A \cap B)$$

 für alle $B \in \mathcal{L}$.
 f^A ist bis auf Abweichungen in einer μ -Nullmenge eindeu-
 tig bestimmt und heißt bedingte Erwartung von A bezüg-
 lich $\mathcal{L}$.

4. 3 Satz: (vgl. [21])

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$ das $\mathcal{G}$ -Ideal der μ -Nullmengen.

Dann ist jede $\mathcal{G}$ -Unteralgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine vollständige Unteralgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Im folgenden sollen die Hilfsmittel für den Beweis des Liftingsatzes der Maßtheorie zusammengestellt werden. - Der Aufbau des Beweises ist dem von IONESCU-TULCEA [12] und HANSEL [9] ähnlich.

4. 4 Lemma:

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra, $\mathcal{N}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$, $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N}$ die Quotientenabbildung, $\mathcal{L}$ eine vollständige Unteralgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ ein π -Homomorphismus mit $\pi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{L}}$, $B_0 \in \mathcal{A}/\mathcal{N}$ und $\mathcal{L}_0$ die von $\mathcal{L} \cup \{B_0\}$ aufgespannte Unteralgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Dann ist $\mathcal{L}_0$ eine vollständige Unteralgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ und es existiert ein π -Homomorphismus $\varphi_0: \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ mit $\varphi_0|_{\mathcal{L}} = \varphi$ und $\pi \circ \varphi_0 = \text{id}_{\mathcal{L}_0}$.

Zum Beweis des Lemmas wird der folgende Hilfssatz benötigt:

4. 5 Hilfssatz:

Sei $\mathcal{L}$ eine Boolesche Algebra, $\mathcal{L}$ eine vollständige Unteralgebra von $\mathcal{L}$ und $B_0 \in \mathcal{L}$. Sei $\mathcal{L}_0$ die von $\mathcal{L} \cup \{B_0\}$ aufgespannte Unteralgebra von $\mathcal{L}$.

Dann gibt es einen Booleschen Homomorphismus $\psi: \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}$ mit $\psi|_{\mathcal{L}} = \text{id}_{\mathcal{L}}$ und $\psi(B) \cap B_0 = B \cap B_0$ für alle $B \in \mathcal{L}_0$.

Beweis:

Sei $\mathcal{T} := \{B \in \mathcal{L} : B_0 \subset B\}$. Nach Voraussetzung existiert dann

$$B_1 := \bigcap_{B \in \mathcal{T}} B \quad \text{in } \mathcal{L}.$$

Es gilt $\text{id}_{\mathcal{L}}(B') \subset B_1 \subset \text{id}_{\mathcal{L}}(B)$ für alle $B, B' \in \mathcal{L}$ mit $B' \subset B_0 \subset B$.

Sei nun $\psi: \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}$ definiert durch

$$\psi((C \cap B_0) \cup (C' \setminus B_0)) = (C \cap B_1) \cup (C' \setminus B_1),$$

wobei $C, C' \in \mathcal{L}$ sind.

Nach Hilfssatz 3.12 ist ψ ein wohldefinierter Boolescher Homomorphismus mit $\psi|_{\mathcal{L}_0} = \text{id}_{\mathcal{L}_0}$.

Sei $B \in \mathcal{L}_0$. Dann gibt es $C, C' \in \mathcal{L}$ mit

$$B = (C \cap B_0) \cup (C' \setminus B_0).$$

Da $B_0 \subset B_1$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi(B) \cap B_0 &= ((C \cap B_1) \cup (C' \setminus B_1)) \cap B_0 \\ &= (C \cap B_0) \cup (C' \cap B_0 \setminus B_1) \\ &= C \cap B_0 = B \cap B_0. \end{aligned}$$

Beweis von Lemma 4.4:

(1) Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathcal{L}_0$. Für jedes $i \in I$ seien $D_i, E_i \in \mathcal{L}$ mit $B_i = (D_i \cap B_0) \cup (E_i \setminus B_0)$.

Nach Voraussetzung existiert $D := \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}/\mathcal{W}} D_i$ und $E := \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}/\mathcal{W}} E_i$ und es gilt: $D, E \in \mathcal{L}$.

Sei $B := (D \cap B_0) \cup (E \setminus B_0) \in \mathcal{L}_0$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} B \cap B_1 &= (D \cap B_1 \cap B_0) \cup (E \cap B_1 \setminus B_0) \\ &= (D \cap D_1 \cap B_0) \cup (E \cap E_1 \setminus B_0) \\ &= (D_1 \cap B_0) \cup (E_1 \setminus B_0) \\ &= B_1 \end{aligned}$$

also $B_i \subset B$ für alle $i \in I$.

Sei andererseits $B' \in \mathcal{A}/\mathcal{W}$ mit $B_i \subset B'$ für alle $i \in I$.

Dann gilt $D_1 \cap B_0 \subset B'$ und $E_1 \setminus B_0 \subset B'$ für alle $i \in I$, also auch $D \cap B_0 \subset B'$ und $E \setminus B_0 \subset B'$.

Daraus ergibt sich $B \subset B'$.

Insgesamt folgt so

$$B = \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}/\mathcal{W}} B_i.$$

$\mathcal{L}_0$ ist demnach eine vollständige Unteralgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{W}$.

- (2) Nach Hilfssatz 4.5 gibt es einen Booleschen Homomorphismus $\psi_1: \mathfrak{L}_0 \longrightarrow \mathfrak{L}$ mit $\psi_1|_{\mathfrak{L}_0} = \text{id}_{\mathfrak{L}_0}$ und
- $$\psi_1(B) \cap B_0 = B \cap B_0 \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{L}_0.$$

Da $\mathfrak{L}_0$ auch die von $\mathfrak{L} \cup \{B_0\}$ aufgespannte Unterualgebra von $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}$ ist gibt es nach dem selben Hilfssatz einen Booleschen Homomorphismus $\psi_2: \mathfrak{L}_0 \longrightarrow \mathfrak{L}$ mit $\psi_2|_{\mathfrak{L}_0} = \text{id}_{\mathfrak{L}_0}$ und $\psi_2(B) \setminus B_0 = B \setminus B_0$ für alle $B \in \mathfrak{L}_0$.

Es gibt ein $A_0 \in \mathfrak{A}$ mit $\pi(A_0) = B_0$.

Sei $\varphi_0: \mathfrak{L}_0 \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiert durch

$$\varphi_0(B) = (\varphi \circ \psi_1(B) \cap A_0) \cup (\varphi \circ \psi_2(B) \setminus A_0) \quad (B \in \mathfrak{L}_0).$$

Dann ist φ_0 eine wohldefinierte Abbildung und für alle $B, B' \in \mathfrak{L}_0$ gilt, weil $\varphi \circ \psi_1$ und $\varphi \circ \psi_2$ $\cap$ -Homomorphismen sind:

$$\begin{aligned} \varphi_0(B) \cap \varphi_0(B') &= \\ &= ((\varphi \circ \psi_1(B) \cap A_0) \cup (\varphi \circ \psi_2(B) \setminus A_0)) \cap ((\varphi \circ \psi_1(B') \cap A_0) \cup (\varphi \circ \psi_2(B') \setminus A_0)) \\ &= (\varphi \circ \psi_1(B) \cap \varphi \circ \psi_1(B') \cap A_0) \cup (\varphi \circ \psi_2(B) \cap \varphi \circ \psi_2(B') \setminus A_0) \\ &= (\varphi \circ \psi_1(B \cap B') \cap A_0) \cup (\varphi \circ \psi_2(B \cap B') \setminus A_0) \\ &= \varphi_0(B \cap B') \end{aligned}$$

Also ist φ_0 ein $\cap$ -Homomorphismus; denn natürlich gilt auch $\varphi_0(0) = 0$ und $\varphi_0(1) = 1$.

Für $B \in \mathfrak{L}$ gilt nach Wahl von ψ_1 und ψ_2 :

$$\psi_1(B) = B \quad \text{und} \quad \psi_2(B) = B.$$

Daraus folgt:

$$\varphi_0(B) = (\varphi(B) \cap B_0) \cup (\varphi(B) \setminus B_0) = \varphi(B).$$

Außerdem ergibt sich für jedes $B \in \mathfrak{L}_0$:

$$\begin{aligned} \pi \circ \varphi_0(B) &= (\pi \circ \varphi \circ \psi_1(B) \cap B_0) \cup (\pi \circ \varphi \circ \psi_2(B) \setminus B_0) \\ &= (\psi_1(B) \cap B_0) \cup (\psi_2(B) \setminus B_0) \\ &= (B \cap B_0) \cup (B \setminus B_0) \\ &= B \end{aligned}$$

φ_0 ist demnach ein $\cap$ -Homomorphismus mit den geforderten Eigenschaften.

4. 6 Lemma:

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $\mathcal{u} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$ und $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{u}$ die Quotientenabbildung.

Sei weiter $(\mathcal{L}_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- (i) $\mathcal{L}_n$ ist eine σ -Unteralgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{u}$.
- (ii) $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1}$
- (iii) $\varphi_n: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{A}$ ist ein σ -Homomorphismus mit $\pi \circ \varphi_n = \text{id}_{\mathcal{L}_n}$.
- (iv) $\varphi_{n+1}|_{\mathcal{L}_n} = \varphi_n$.

Mit $\mathcal{L}_\infty$ werde die von $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n$ in $\mathcal{A}/\mathcal{u}$ erzeugte σ -Unteralgebra bezeichnet.

Dann gibt es einen σ -Homomorphismus $\varphi_\infty: \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{A}$ mit $\pi \circ \varphi_\infty = \text{id}_{\mathcal{L}_\infty}$ und $\varphi_\infty|_{\mathcal{L}_n} = \varphi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Sei o.B.d.A. $\mu(X) = 1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_n := \pi^{-1}(\mathcal{L}_n)$ und $\mathcal{A}_\infty := \pi^{-1}(\mathcal{L}_\infty)$. Dann ist $\mathcal{A}_\infty$ die von $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ in $\mathcal{A}$ erzeugte σ -Unteralgebra.

Für $A \in \mathcal{A}_\infty$ und $n \in \mathbb{N}$ sei f_n^A die bedingte Erwartung von A bezüglich $\mathcal{A}_n$.

Sei $B \in \mathcal{L}_\infty$ und $A \in \mathcal{A}_\infty$ mit $\pi(A) = B$.

Für alle $m, k \in \mathbb{N}$ ist dann $\{f_m^A > 1 - \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}_m$ und $\pi(\{f_m^A > 1 - \frac{1}{k}\}) \in \mathcal{L}_m$ unabhängig von der speziellen Wahl von A mit $\pi(A) = B$.

Sei $\gamma_{m,k}(B) := \varphi_m(\pi(\{f_m^A > 1 - \frac{1}{k}\}))$ mit $\pi(A) = B$

und $\varphi_\infty: \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{A}$ definiert durch

$$\varphi_\infty(B) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,k}(B).$$

Dann ist φ_∞ nach den vorangegangenen Überlegungen eine wohldefinierte Abbildung.

Um nachzuweisen, daß φ_∞ die im Lemma gewünschten Eigenschaften hat, bleibt nur zu zeigen:

- a) φ_∞ erhält endliche Durchschnitte,
- b) $\varphi_\infty|_{\mathcal{L}_n} = \varphi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- c) $\pi \circ \varphi_\infty = \text{id}_{\mathcal{L}_\infty}$.

zu a): Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{L}_\infty$ mit $B_1 \subset B_2$ und $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $\pi(A_i) = B_i$ ($i = 1, 2$). Dann gilt bekanntlich für alle $m \in \mathbb{N}$

$$f_m^{A_1} \leq f_m^{A_2} \quad \mu\text{-fast-überall.}$$

Also ist für alle $k, m \in \mathbb{N}$

$$\{f_m^{A_1} > 1 - \frac{1}{k}\} \subset \{f_m^{A_2} > 1 - \frac{1}{k}\} \in \mathcal{M}$$

und deshalb

$$\gamma_{m,k}(B_1) \subset \gamma_{m,k}(B_2) \quad .$$

Daraus ergibt sich sofort $\varphi_\infty(B_1) \subset \varphi_\infty(B_2)$.

Hieraus wiederum folgt unmittelbar, daß für alle $C_1, C_2 \in \mathcal{L}_\infty$ gilt:

$$\varphi_\infty(C_1 \cap C_2) \subset \varphi_\infty(C_1) \cap \varphi_\infty(C_2) \quad .$$

Es ist demnach nur noch nachzuprüfen, ob auch die Umkehrung dieser letzten Beziehung richtig ist.

Seien dazu $C_1, C_2 \in \mathcal{L}_\infty$ und $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $C_i = \pi(A_i)$ ($i=1,2$).

Für $m \in \mathbb{N}$ gilt dann μ -fast-überall:

$$f_m^{A_1 \cap A_2} \geq f_m^{A_1} + f_m^{A_2} - 1 \quad ;$$

denn für $A := \{f_m^{A_1} + f_m^{A_2} - 1 > f_m^{A_1 \cap A_2}\} \in \mathcal{A}_m$ ist

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_A (f_m^{A_1 \cap A_2} - f_m^{A_1} - f_m^{A_2} + 1) d\mu = \\ &= \mu(A \cap A_1 \cap A_2) - \mu(A \cap A_1) - \mu(A \cap A_2) + \mu(A) \\ &= \mu(A) - \mu(A \cap (A_1 \cup A_2)) \geq 0, \end{aligned}$$

also $\mu(A) = 0$.

Seien nun $m, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\{f_m^{A_1} > 1 - \frac{1}{2k}\} \cap \{f_m^{A_2} > 1 - \frac{1}{2k}\} \subset \{f_m^{A_1} + f_m^{A_2} - 1 > 1 - \frac{1}{k}\}$$

und

$$\{f_m^{A_1} + f_m^{A_2} - 1 > 1 - \frac{1}{k}\} \subset \{f_m^{A_1 \cap A_2} > 1 - \frac{1}{k}\} \in \mathcal{M},$$

also folgt

$$\varphi_m \circ \pi(\{f_m^{A_1} > 1 - \frac{1}{2k}\}) \cap \varphi_m \circ \pi(\{f_m^{A_2} > 1 - \frac{1}{2k}\}) \subset \varphi_m \circ \pi(\{f_m^{A_1 \cap A_2} > 1 - \frac{1}{k}\}),$$

und damit

$$\gamma_{m,2k}(C_1) \cap \gamma_{m,2k}(C_2) \subset \gamma_{m,k}(C_1 \cap C_2) \quad .$$

Folglich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,2k}(C_1) \cap \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,2k}(C_2) \subset \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,k}(C_1 \cap C_2)$$

und deshalb

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,2k}(C_1) \cap \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,2k}(C_2) \right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,k}(C_1 \cap C_2).$$

Seien nun $n, n' \in \mathbb{N}$ mit o.B.d.A. $n \leq n'$. Dann hat man

$$\bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,2k}(C_1) \subset \bigcap_{m \geq n'} \gamma_{m,2k}(C_1)$$

also

$$\bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,2k}(C_1) \cap \bigcap_{m \geq n'} \gamma_{m,2k}(C_2) \subset \bigcap_{m \geq n'} \gamma_{m,2k}(C_1) \cap \bigcap_{m \geq n'} \gamma_{m,2k}(C_2)$$

und damit

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,2k}(C_1) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,2k}(C_2) \right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,k}(C_1 \cap C_2).$$

Daraus ergibt sich sofort

$$\varphi_{\infty}(C_1) \cap \varphi_{\infty}(C_2) \subset \varphi_{\infty}(C_1 \cap C_2)$$

zu b): Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{L}_{n_0}$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $\pi(A) = B$.

Für alle $m \geq n_0$ ist dann

$$f_m^A = 1_A \quad \mu\text{-fast-überall.}$$

Daraus folgt für alle $m \geq n_0$, $k \geq 2$:

$$\gamma_{m,k}(B) = \varphi_m \circ \pi(\{f_m^A > 1 - 1/k\}) = \varphi_m \circ \pi(A) = \varphi_m(B) = \varphi_{n_0}(B).$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$:

$$\bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,k}(B) = \varphi_{n_0}(B)$$

Deshalb ist

$$\varphi_{\infty}(B) = \varphi_{n_0}(B).$$

Aus a) und b) folgt insbesondere, daß φ_{∞} ein σ -Homomorphismus ist, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0, 1 \in \mathcal{L}_n$ und deshalb $\varphi_{\infty}(0) = \emptyset$ und $\varphi_{\infty}(1) = X$.

zu c): Sei $B \in \mathcal{L}_{\infty}$ und $A \in \mathcal{A}$ mit $B = \pi(A)$.

Behauptung I: $\varphi_{\infty}(B) \setminus A \in \mathcal{M}$

Der Beweis wird indirekt geführt:

Annahme: $\alpha := \mu(\varphi_{\infty}(B) \setminus A) > 0$.

Weil $A \in \mathcal{Q}_\infty$ ist, gibt es nach dem Approximationssatz 4.1 ein $n_1 \in \mathbb{N}$ und ein $A' \in \mathcal{Q}_{n_1}$ mit $\mu(A \Delta A') < \frac{\alpha}{4}$.

Es ist

$$\begin{aligned}\varphi_\infty(B) \setminus A &= \varphi_\infty(B) \cap ((\bigcup A) \Delta (\bigcup A') \Delta (\bigcup A')) \\ &= (\varphi_\infty(B) \cap \bigcup A') \Delta (\varphi_\infty(B) \cap ((\bigcup A) \Delta (\bigcup A'))) \\ &= (\varphi_\infty(B) \setminus A') \Delta (\varphi_\infty(B) \cap (A \Delta A')) \\ &\subset (\varphi_\infty(B) \setminus A') \cup (A \Delta A')\end{aligned}$$

und deshalb

$$\mu(\varphi_\infty(B) \setminus A) \leq \mu(\varphi_\infty(B) \setminus A') + \mu(A \Delta A'),$$

also

$$\frac{3}{4}\alpha = \mu(\varphi_\infty(B) \setminus A) - \frac{\alpha}{4} \leq \mu(\varphi_\infty(B) \setminus A').$$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Aus der Definition von $\varphi_\infty(B)$ ergibt sich dann, daß auch gilt:

$$\mu((\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \gamma_{m,k}(B)) \setminus A') \geq \frac{3}{4}\alpha.$$

Aus der σ -Stetigkeit von μ folgt darum die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geq n$ gilt:

$$\mu(\gamma_{m,k}(B) \setminus A') > \frac{1}{2}\alpha.$$

Sei $m \geq \max(n, n_1)$. Dann ist

$$\mu(\gamma_{m,k}(B) \setminus A') = \mu(\{f_m^A > 1 - \frac{1}{k}\} \setminus A') > \frac{\alpha}{2}$$

und

$$C := \{f_m^A > 1 - \frac{1}{k}\} \setminus A' \in \mathcal{Q}_m.$$

Weiter gilt deshalb

$$\mu(A \setminus A') = \int_{A'} f_m^A d\mu \geq \int_C f_m^A d\mu \geq (1 - \frac{1}{k})\mu(C) > \frac{\alpha}{2}(1 - \frac{1}{k}).$$

Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig war, steht dies im Widerspruch zu

$$\mu(A \setminus A') \leq \mu(A \Delta A') < \frac{1}{4}\alpha.$$

Demnach ist die Annahme falsch und darum Behauptung 1 richtig.

Behauptung 2: $A \setminus \varphi_\infty(B) \in \mathcal{M}$

Beweis: Es gilt

$$A \setminus \varphi_\infty(B) = A \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \bigcup_{\gamma} \varphi_m \circ \mathbb{I}(\{f_m^A > 1 - \frac{1}{k}\}).$$

Nun gilt aber bis auf eine μ -Nullmenge für alle $m, k \in \mathbb{N}$:

$$\{\varphi_m \circ \pi(\{f_m^A > 1 - \frac{1}{k}\})\} = \{f_m^A > 1 - \frac{1}{k}\} = \{f_m^A \leq 1 - \frac{1}{k}\}.$$

Außerdem ist

$$f_m^A = 1 - f_m^{CA} \quad \mu\text{-fast-überall,}$$

so daß für $m, k \in \mathbb{N}$ bis auf eine μ -Nullmenge gilt:

$$\{f_m^A \leq 1 - \frac{1}{k}\} = \{1 - f_m^{CA} \leq 1 - \frac{1}{k}\} = \{f_m^{CA} \geq \frac{1}{k}\}.$$

Insgesamt folgt daher

$$\mu(A \setminus \varphi_\infty(B)) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m > n} \{f_m^{CA} \geq \frac{1}{k}\} \cap A\right).$$

Um die Behauptung 2 zu beweisen, genügt es darum zu zeigen, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$ die Menge

$$E := A \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \leq m} \{f_m^{CA} > \alpha\}$$

eine μ -Nullmenge ist.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $\delta := \frac{1}{\alpha+2} \varepsilon$.

Dann gibt es wegen $E \in \mathcal{O}_\infty$ nach dem Approximationssatz 4.1

ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $D \in \mathcal{O}_{n_0}$ mit

$$\mu(E \Delta D) < \delta.$$

Es gilt

$$(*) \quad D \cap E = D \cap A \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m > n} \{f_m^{CA} > \alpha\} \right) \subset D \cap A \cap \bigcup_{m > n_0} \{f_m^{CA} > \alpha\}.$$

Wegen der G -Stetigkeit von μ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$(**) \quad \mu\left(\left(\bigcup_{m > n_0} \{f_m^{CA} > \alpha\}\right) \setminus \left(\bigcup_{m=n_0}^{n_1} \{f_m^{CA} > \alpha\}\right)\right) < \delta.$$

Sei

$$G := D \cap \bigcup_{m=n_0}^{n_1} \{f_m^{CA} > \alpha\}.$$

Zwischenbehauptung: $\alpha \mu(G) < \delta$

Beweis der Zwischenbehauptung: Sei $C_{n_0} := D \cap \{f_{n_0}^{CA} > \alpha\}$

und für $n_0 < n \leq n_1$ sei

$$C_n := D \cap \{f_{n_0}^{CA} \leq \alpha\} \cap \dots \cap \{f_{n-1}^{CA} \leq \alpha\} \cap \{f_n^{CA} > \alpha\}.$$

Dann gilt $C_n \cap C_m = \emptyset$ falls $n \neq m$, $C_n \in \mathcal{O}_n$ und $G = \bigcup_{n=n_0}^{n_1} C_n$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha \mu(G) &= \alpha \sum_{n=n_0}^{n_1} \mu(C_n) = \sum_{n=n_0}^{n_1} \int_{C_n} \alpha \, d\mu \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{n_1} \int_{C_n} f_n^A \, d\mu = \sum_{n=n_0}^{n_1} \mu(C_n \cap A) = \sum_{n=n_0}^{n_1} \int_{C_n} f_{n_1}^A \, d\mu \\ &\leq \int_G f_{n_1}^A \, d\mu \end{aligned}$$

Weil $G \in \mathcal{O}_{n_1}$ ist, gilt:

$$\int_G f_{n_1}^A \, d\mu = \mu(G \cap A) = \mu(D \cap \bigcup_{n=n_0}^{n_1} \{f_n^A > \alpha\} \cap A) \leq \mu(D \cap A).$$

Nun ist $E \subset A$ und darum $D \cap A \subset D \cap E$.

Deshalb gilt $\mu(D \cap A) \leq \mu(D \cap E) \leq \mu(D \triangle E) < \delta$.

Insgesamt folgt so die Zwischenbehauptung.

Wegen (*) und (**) ist

$$\begin{aligned} \mu(G) + \delta &\stackrel{(*)}{\geq} \mu(D \cap \bigcup_{m \geq n_0} \{f_m^A > \alpha\}) \stackrel{(*)}{\geq} \mu(D \cap E) \\ &\geq \mu(E) - \mu(E \setminus D) \geq \mu(E) - \mu(E \triangle D) \geq \mu(E) - \delta. \end{aligned}$$

Dies zieht wegen der Zwischenbehauptung

$$\mu(E) \leq \frac{\delta}{\alpha} + 2\delta = \left(\frac{1}{\alpha} + 2\right)\delta = \epsilon$$

nach sich.

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist E also ein μ -Nullmenge.

Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Aus Behauptung 1 und 2 zusammen folgt

$$\varphi_\infty(B) \triangle A \in \mathcal{N}$$

und deshalb

$$\mathbb{T}(\varphi_\infty(B)) = \mathbb{T}(A) = B,$$

womit auch c) gezeigt wäre.

4.7 Satz:

Jeder endliche Maßraum besitzt eine untere (obere) Dichte.

Genauer: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$, dann gibt es eine untere (obere) Dichte $\varphi: \mathcal{A}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}$.

Beweis:

Sei $\mathcal{T} := \{(\mathbb{K}, \varphi) : \mathbb{K} \text{ } \varepsilon\text{-Unteralgebra von } \mathcal{A}/\mathcal{M} \text{ und } \varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}\mathcal{L} \text{ } \mathcal{A}\text{-Homomorphismus mit } \pi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{K}}\}$.

Für $(\mathbb{K}, \varphi), (\mathbb{K}', \varphi') \in \mathcal{T}$ sei $(\mathbb{K}, \varphi) \leq (\mathbb{K}', \varphi')$ äquivalent zu $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ und $\varphi'|_{\mathbb{K}} = \varphi$.

Dann ist $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{T}$.

(1) Behauptung: $\mathcal{T}$ ist durch $\leq$ induktiv geordnet.

Beweis: Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ eine Kette.

1. Fall: Für jede Folge $(\mathbb{K}_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ gibt es ein $(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}$ mit $(\mathbb{K}_n, \varphi_n) \leq (\mathbb{K}, \varphi)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $\mathbb{L} := \bigcup_{(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}} \mathbb{K}$ eine ε -Unteralgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{M}$

und $\varphi_0: \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}$ mit $\varphi_0(C) := \varphi(C)$, falls $C \in \mathbb{K}$ für ein $(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}$, ein wohldefinierter $\mathcal{A}$ -Homomorphismus mit $\pi \circ \varphi_0 = \text{id}$.

Also ist $(\mathbb{L}, \varphi_0) \in \mathcal{T}$ und $(\mathbb{K}, \varphi) \leq (\mathbb{L}, \varphi_0)$ für alle $(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}$.

2. Fall: Es gibt eine Folge $(\mathbb{K}_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$, für die kein $(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}$ existiert mit $(\mathbb{K}_n, \varphi_n) \leq (\mathbb{K}, \varphi)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $B \in \bigcup_{(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}} \mathbb{K}$. Dann gibt es ein $(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}$ mit $B \in \mathbb{K}$.

Außerdem existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(\mathbb{K}_n, \varphi_n) \not\leq (\mathbb{K}, \varphi)$, d.h. aber - weil $\mathcal{K}$ total geordnet ist -

$$(\mathbb{K}_n, \varphi_n) \geq (\mathbb{K}, \varphi),$$

also $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_n$ und damit $B \in \mathbb{K}_n$.

Demnach gilt $\mathbb{L} := \bigcup_{(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}} \mathbb{K} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n$.

Sei nun $\mathbb{K}_\infty$ die von $\mathbb{L}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ aufgespannte ε -Unteralgebra. Nach Lemma 4.6 gibt es einen $\mathcal{A}$ -Homomorphismus

$\varphi_\infty: \mathbb{K}_\infty \rightarrow \mathcal{O}\mathcal{L}$ mit $\pi \circ \varphi_\infty = \text{id}_{\mathbb{K}_\infty}$ und $\varphi_\infty|_{\mathbb{K}_n} = \varphi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also ist $(\mathbb{K}_\infty, \varphi_\infty) \in \mathcal{T}$ und $(\mathbb{K}, \varphi) \leq (\mathbb{K}_\infty, \varphi_\infty)$ für alle $(\mathbb{K}, \varphi) \in \mathcal{K}$.

Insgesamt folgt so die Behauptung.

(2) Behauptung: $\mathcal{T} \neq \emptyset$

Beweis: Sei $\mathcal{L} := \{0,1\}$ und $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ definiert durch $\varphi(0) = \emptyset$ und $\varphi(1) = X$. Dann ist $(\mathcal{L}, \varphi) \in \mathcal{T}$.

Also stimmt die Behauptung.

Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $(\mathcal{L}_{\max}, \varphi_{\max})$ in $\mathcal{T}$.

Da $\mathcal{L}_{\max}$ nach Satz 4.3 eine vollständige Unterlgebra von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ ist, folgt aus Lemma 4.4, daß $\mathcal{L}_{\max} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ gilt.

4. 8 Korollar: (Liftingsatz der Maßtheorie)

Jeder vollständige endliche Maßraum besitzt ein Lifting.

Genauer: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger endlicher Maßraum und $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{A}: \mu(A) = 0\}$, so existiert ein Lifting von $\mathcal{A}$ bezüglich $\mathcal{N}$.

Beweis:

Das Korollar folgt sofort aus dem vorangehenden Satz 4.7 zusammen mit Korollar 3.6.

Da hier der einfache direkte Beweis von Korollar 3.6 angewendet werden kann, ist Korollar 4.8 tatsächlich eine triviale Folgerung aus Satz 4.7.

Das voranstehende Korollar 4.8 läßt sich auf Grund von Satz 3.3 auf folgende Art verschärfen:

4. 9 Korollar:

Sei $M = (X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{A}: \mu(A) = 0\}$.

Ist $\mathcal{N}$ bedingt κ -vollständig für alle Kardinalzahlen $\kappa < \text{card}(\mathcal{A}/\mathcal{N})$, so besitzt M ein Lifting.

Unter Verwendung der Kontinuumshypothese erhält man noch folgendes Resultat aus VON NEUMANN/STONE [17]:

4.10 Korollar:

Sei $\mathcal{A}$ die σ -Algebra der Borelmengen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{N}$ das σ -Ideal der Borelmengen mit Lebesgueschen Maß 0.

Dann existiert ein Lifting von $\mathcal{A}$ bezüglich $\mathcal{N}$.

Beweis:

Es ist bekannt, daß $\mathcal{Q}/\omega$ die selbe Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ hat.

Mit Hilfe der Kontinuumshypothese folgt dann die Behauptung aus Korollar 4.9.

§ 5. Ein Schnittersatz von HASUMI und ein Spezialfall eines Schnittersatzes von MICHAEL

5. 1 Definition:

Ein topologischer Raum X heißt extrem-unzusammenhängend, wenn in X der Abschluß jeder offenen Menge wieder offen ist.

5. 2 Bemerkung:

Ein extrem-unzusammenhängender kompakter Raum X ist ein Boolescher Raum.

Außerdem ist in X das Innere jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen.

5. 3 Lemma:

Ist X ein kompakter Raum, so gibt es einen Booleschen Raum Z und eine surjektive stetige Abbildung $f: Z \rightarrow X$.

Beweis:

Sei Z der Boolesche Darstellungsraum von $\mathcal{P}(X)$ und

$\varphi: \mathcal{Q}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ der übliche Boolesche Isomorphismus.

Sei $f: Z \rightarrow X$ definiert durch

$$f(z) = \bigcap_{z \in A \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)} \quad (z \in Z).$$

Dann ist f eine wohldefinierte Abbildung, denn es gilt für $z \in Z$:

(1) $\{\overline{\varphi(A)}: A \in \mathcal{Q}(Z) \text{ und } z \in A\}$ ist absteigend filtrierend und daher $\bigcap_{z \in A \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)} \neq \emptyset$.

(2) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $x_1 \in \bigcap_{z \in A \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)}$.

Dann gibt es eine abgeschlossene Umgebung U von x_1 mit $x_2 \notin U$.

Angenommen es wäre $z \in \bigcap_{z \in A \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)}$ mit $z \notin U$.

Dann wäre $x_1 \in \bigcap_{z \in A \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)} \subset \overline{U}$ und damit

$x_1 \in U \cap \overline{U} = U \cap \emptyset$ im Widerspruch zu $x_1 \in \emptyset$.

Also ist $z \in \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{Q}(Z)$ und deshalb zieht

$$x_2 \notin U = \bigcap_{z \in \mathcal{A} \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)}$$

nach sich.

Demnach ist $\bigcap_{z \in \mathcal{A} \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)}$ einelementig.

Es bleibt zu zeigen, daß f stetig und surjektiv ist.

Sei dazu $U \subset X$ offen. Dann gilt:

$$f^{-1}(U) = \{z \in Z : \bigcap_{z \in \mathcal{A} \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)} \cap U \neq \emptyset\}.$$

Weil U offen und $\{\overline{\varphi(A)} : A \in \mathcal{Q}(Z) \text{ und } z \in A\}$ absteigend

filtrierend ist, ist für $z \in Z$ $\bigcap_{z \in \mathcal{A} \in \mathcal{Q}(Z)} \overline{\varphi(A)} \neq \emptyset$

äquivalent dazu, daß ein $A \in \mathcal{Q}(Z)$ mit $z \in A$ und $\overline{\varphi(A)} \subset U$ existiert, d.h. es gilt:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{Q}(Z) \\ u.\varphi(A) \subset U}} A.$$

Diese Menge ist natürlich offen in Z .

Sei nun $x \in X$ und $\mathcal{U} := \{A \in \mathcal{Q}(Z) : x \in \varphi(A)\}$. Dann ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter in $\mathcal{Q}(Z)$. Also gibt es ein $z \in Z$ mit

$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{Q}(Z) : z \in A\}$. Es ist klar, daß dann $f(z) = x$ gilt.

Also ist f eine stetige und surjektive Abbildung und die Behauptung des Lemmas ist bewiesen.

Bemerkung zum Beweis:

Das im Beweis konstruierte Z ist die Stone-Čech-Kompaktifizierung der Menge X versehen mit der diskreten Topologie; f ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung von id_X zu einer stetigen Abbildung von Z in den kompakten Raum X .

5. 4 Lemma:

Sei X ein extrem-unzusammenhängender kompakter, Y ein Boolescher Raum und $F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ eine oberhalb-stetige Korrespondenz.

Dann gibt es eine Boolesche Korrespondenz G von X nach Y mit $G \leq F$.

Beweis:

Nach Satz 1.18 ist $F^* \in \text{VH}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{F}(X))$. Weil X extrem-unzusammenhängend ist, ist für alle $A \in \mathcal{O}(Y)$ die Menge $\overline{F^*(A)}$ abgeschlossen. Nach Hilfssatz 2.7 existiert daher ein $\cup$ -Homomorphismus $\hat{F}^*: \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ mit

$$\hat{F}^* \leq F^* .$$

Wieder nach Satz 1.18 ist $G := (\hat{F}^*)^* \in \text{BK}(X, Y)$ mit

$$G \leq F .$$

5. 5 Satz: (HASUMI [10])

Jede punktabgeschlossene, oberhalb-stetige Korrespondenz von einem extrem-unzusammenhängenden kompakten Raum in einen kompakten Raum besitzt einen stetigen Schnitt.

Beweis:

Sei X ein extrem-unzusammenhängender kompakter Raum, Y ein kompakter Raum und $F: X \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ eine oberhalb-stetige Korrespondenz.

Nach Lemma 5.3 gibt es einen Booleschen Raum Z und eine surjektive stetige Abbildung $p: Z \longrightarrow Y$.

Sei $H: X \longrightarrow \mathcal{F}(Z)$ definiert durch

$$H(x) = p^{-1}(F(x)) \quad (x \in X).$$

Dann ist H eine punktabgeschlossene Korrespondenz von X nach Z .

Außerdem gilt für jede Menge $C \in \mathcal{F}(Z)$:

$$\begin{aligned} H^{-1}(C) &= \{x \in X: p^{-1}(F(x)) \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X: F(x) \cap p(C) \neq \emptyset\} \\ &= F^{-1}(p(C)) \in \mathcal{F}(X). \end{aligned}$$

Also ist H oberhalb-stetig.

Nach Lemma 5.4 existiert darum eine Boolesche Korrespondenz G von X nach Z mit $G \leq H$.

Da X extrem-unzusammenhängend ist, erfüllt G trivialerweise die Bedingung (V). Nach Satz 2.6 gibt es deshalb eine stetige Abbildung $\tilde{f}: X \longrightarrow Z$ mit $\tilde{f}(x) \in G(x)$ für alle $x \in X$.

Dann ist $f := p \circ \tilde{f}$ eine stetige Abbildung von X nach Y ,
und es gilt für alle $x \in X$:

$$f(x) = p(\tilde{f}(x)) \in p(G(x)) \subset p(H(x)) = F(x).$$

Also ist f ein stetiger Schnitt für F .

5. 6 Bemerkung:

Satz 5.5 wird von HASUMI in [10] direkt bewiesen. Der komplizierte Beweis benutzt implizit ähnliche Techniken, wie sie in § 2 dieser Arbeit entwickelt wurden.

HASUMI verwendet Satz 5.5 in [10] als Hilfsmittel bei der Charakterisierung der injektiven komplexen Banachräume.

5. 7 Satz: (Spezialfall eines Satzes von MICHAEL [16])

Seien X und Y Boolesche Räume, Y metrisierbar und

$F: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ eine Boolesche Korrespondenz.

Dann gibt es einen stetigen Schnitt für F .

Beweis:

Weil Y metrisierbar ist, existiert eine abzählbare Basis der Topologie von Y , also auch eine abzählbare Basis aus zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen. Die Basismengen trennen selbstverständlich die Punkte von Y . Also erfüllt F die Bedingung (V).

Daher folgt die Behauptung des Satzes unmittelbar aus Satz 2.6.

5. 8 Bemerkung:

Der von MICHAEL in [16] bewiesene Satz lautet:

Jede unterhalb-stetige, punktabgeschlossene Korrespondenz von einem total-unzusammenhängenden parakompakten Raum in einen vollständig metrisierbaren Raum besitzt einen stetigen Schnitt.

Satz 5.7 stellt also einen sehr speziellen Fall des Satzes von MICHAEL dar.

§ 6. Liftung stetiger Abbildungen und GLEASONS Charakterisierung der projektiven kompakten Räume

6. 1 Lemma:

Seien X und Z Boolesche Räume, Y kompakt, $f: X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv, sowie $g: Z \rightarrow Y$ stetig mit:

- (i) Für alle $A \in \mathcal{O}(X)$ ist $\overline{g^{-1}(f(A))}$ abgeschlossen.
- (ii) Es gibt eine punktetrennende Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}(X)$, so daß für jede Kardinalzahl

$$\kappa < \text{card}(\{S \in \mathcal{T} : f(S) \cap f(\complement S) \neq \emptyset\}),$$

für alle $A \in \mathcal{O}(X)$ und für alle $B \in \mathcal{T}^\kappa(Z)$ mit

$$B \subset g^{-1}(f(A) \cap f(\complement A))$$

der offene Kern $\overset{\circ}{B}$ von B abgeschlossen ist.

Dann gibt es eine stetige Abbildung $h: Z \rightarrow X$

mit $f \circ h = g$.

Beweis:

Sei $H: Z \rightarrow \mathcal{F}(X)$ definiert durch

$$H(z) = f^{-1}(g(z)) \quad (z \in Z).$$

Dann ist H eine punktabgeschlossene, oberhalb-stetige Korrespondenz, und für alle $A \in \mathcal{O}(X)$ gilt nach Voraussetzung (i):

$$\begin{aligned} \overline{H^{-1}(A)} &= \overline{\{z \in Z : f^{-1}(g(z)) \cap A \neq \emptyset\}} \\ &= \overline{\{z \in Z : g(z) \cap f(A) \neq \emptyset\}} \\ &= \overline{g^{-1}(f(A))} \in \mathcal{F}(Z). \end{aligned}$$

Aus Hilfssatz 2.7 folgt daher die Existenz einer Booleschen Korrespondenz $G: Z \rightarrow \mathcal{F}(X)$ mit $G \leq H$.

Für $S \in \mathcal{T}$ ist

$$\begin{aligned} G^{-1}(S) \cap G^{-1}(\complement S) &\subset H^{-1}(S) \cap H^{-1}(\complement S) = g^{-1}(f(S)) \cap g^{-1}(f(\complement S)) \\ &= g^{-1}(f(S) \cap f(\complement S)). \end{aligned}$$

Falls $f(S) \cap f(\complement S) = \emptyset$ ist, gilt also auch

$$G^{-1}(S) \cap G^{-1}(\complement S) = \emptyset.$$

Daraus folgt:

$$\text{card}(\{S \in \mathcal{T}: G^{-1}(S) \cap G^{-1}(\{S\}) \neq \emptyset\}) \leq \text{card}(\{S \in \mathcal{T}: f(S) \cap f(\{S\}) \neq \emptyset\}).$$

Aus Voraussetzung (ii) ergibt sich somit, daß G die Bedingung (V) erfüllt.

Nach Satz 2.6 existiert deshalb eine stetige Abbildung

$$h: Z \longrightarrow X \text{ mit } h(z) \in G(z) \subset H(z) = f^{-1}(g(z)),$$

$$\text{d.h.} \quad f(h(z)) = g(z) \quad \text{für alle } z \in Z.$$

6. 2 Bemerkung:

Ist in Lemma 6.1 f eine offene Abbildung, so ist die Bedingung (i) trivialerweise erfüllt.

6. 3 Korollar:

Seien X und Z Boolesche Räume, Y ein kompakter Raum und

$f: X \longrightarrow Y$ eine stetige, offene, surjektive Abbildung.

Ist X metrisierbar, so gibt es für jede stetige Abbildung $g: Z \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung $h: Z \longrightarrow X$ mit

$$f \circ h = g$$

Beweis:

Die Bedingung (i) von Lemma 6.1 ist erfüllt, weil f offen ist.

Da X metrisierbar ist, gibt es ein abzählbares punktetrennendes System $\mathcal{T} \subset \mathcal{Q}(X)$. Also ist Bedingung (ii) von Lemma 6.1 erfüllt.

Die Behauptung des Korollars folgt darum unmittelbar aus Lemma 6.1.

6. 4 Bemerkungen:

(i) Ist X ein Boolescher Raum, Y ein kompakter Raum und $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige, offene und surjektive Abbildung, so ist auch Y ein Boolescher Raum.

(ii) Korollar 6.3 wird von HALMOS in [6] für $Z = Y$ und $g = \text{id}_Y$ formuliert und stellt eine direkte Konsequenz des Satzes von MICHAEL [16] dar.

6. 5 Definition:

Ein kompakter Raum Z heißt projektiv, wenn für je zwei kompakte Räume X und Y , für jede stetige Surjektion $f: X \longrightarrow Y$ und für jede stetige Abbildung $g: Z \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung $h: Z \longrightarrow X$ mit $f \circ h = g$ existiert.

6. 6 Satz: (GLEASON [4])

Jeder extrem-unzusammenhängende kompakte Raum ist projektiv.

Beweis:

Sei Z ein extrem-unzusammenhängender kompakter Raum.

Seien X, Y kompakt, $f: X \longrightarrow Y$ stetig und surjektiv, sowie $g: Z \longrightarrow Y$ stetig.

Nach Lemma 5.3 gibt es einen Booleschen Raum T und eine stetige Surjektion $p: T \longrightarrow X$.

Dann sind mit T an Stelle von X und $f \circ p$ an Stelle von f die Voraussetzungen von Lemma 6.1 erfüllt, weil Z extrem-unzusammenhängend ist.

Also gibt es eine stetige Abbildung $h': Z \longrightarrow T$ mit

$$f \circ p \circ h' = g.$$

Für $h := p \circ h'$ gilt also $f \circ h = g$.

Deshalb ist Z projektiv.

6. 7 Bemerkungen:

- (i) Wie GLEASON in [4] zeigt, gilt auch die Umkehrung des vorangehenden Satzes. Der Beweis dafür ist einfach, soll aber hier nicht ausgeführt werden.
- (ii) Satz 6.6 ist eine direkte Folgerung aus dem Schnittsatz 5.5 von HASUMI:
Seien X, Y und Z , f und g wie im Beweis von Satz 6.6. Dann ist $z \mapsto f^{-1}(g(z))$ ($z \in Z$) eine punktabgeschlossene, oberhalb-stetige Korrespondenz von Z nach X . Nach Satz 5.5 gibt es daher eine stetige Abbildung $h: Z \longrightarrow X$ mit $h(z) \in f^{-1}(g(z))$, d.h. $f(h(z)) = g(z)$ für alle $z \in Z$.

6. 8 Korollar:

(SIKORSKI [22])

Sei $\mathcal{L}$ eine vollständige Boolesche Algebra und $\mathcal{K}$ eine Unteralgebra der Booleschen Algebra $\mathcal{A}$.

Dann läßt sich jeder Boolesche Homomorphismus $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ zu einem Booleschen Homomorphismus $\tilde{\varphi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}$ fortsetzen.

Beweis:

Beschränkt man die Aussage von Satz 6.6 auf Boolesche Räume, so formuliert Korollar 6.8 genau die dazu duale Aussage.

Anhang zu § 6: Eine Verschärfung des Fortsetzungssatzes von SIKORSKI

6. 9 Satz:

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra und $\mathcal{K}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Sei $\mathcal{L}$ eine Boolesche Algebra, die für jede Kardinalzahl $\kappa \leq \text{card}(\mathcal{A})$ κ -vollständig ist.

Dann läßt sich jeder Boolesche Homomorphismus $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ zu einem Booleschen Homomorphismus $\tilde{\varphi}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}$ fortsetzen.

Beweis:

Sei Ω die kleinste Ordinalzahl mit $\text{card}(\Omega) = \text{card}(\mathcal{A})$.

Dann existiert eine Bijektion $\Omega \rightarrow \mathcal{A}$ mit $A_1 = 0$.
 $\omega \mapsto A_\omega$

Für $\omega < \Omega$ sei $\mathcal{A}_\omega$ die von $\mathcal{K} \cup \{A_{\omega'} : \omega' < \omega\}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}_1 = \mathcal{K}$. Sei weiter $\varphi_1 = \varphi$.

Sei nun $\omega_0 < \Omega$, so daß für alle $\omega < \omega_0$ bereits ein Boolescher Homomorphismus $\varphi_\omega: \mathcal{A}_\omega \rightarrow \mathcal{L}$ mit $\varphi_\omega|_{\mathcal{K}} = \varphi_\omega$ für alle $\omega' < \omega$ definiert ist.

Sei $\varphi': \bigcup_{\omega < \omega_0} \mathcal{A}_\omega \rightarrow \mathcal{L}$ definiert durch

$$\varphi'(A) = \varphi_\omega(A), \text{ falls } A \in \mathcal{A}_\omega (\omega < \omega_0).$$

Dann ist $\mathcal{A}' := \bigcup_{\omega < \omega_0} \mathcal{A}_\omega$ eine Boolesche Algebra und φ'

ein Boolescher Homomorphismus.

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad C_1 &:= \bigcup_{B \in \mathfrak{X}', B \in A_{\omega_0}} \mathfrak{L} \varphi'(B) \\ \text{und} \quad C_2 &:= \bigcap_{B \in \mathfrak{X}', A_{\omega_0} \subset B} \mathfrak{L} \varphi'(B) \end{aligned}$$

Dieses Supremum und Infimum existieren nach Voraussetzung über $\mathfrak{L}$, weil $\text{card}(\mathfrak{X}') \leq \text{card}(\mathcal{A})$ ist. Es gilt:

$$C_1 \subset C_2$$

Sei $C_0 \in \mathfrak{L}$ mit $C_1 \subset C_0 \subset C_2$.

Da $\mathcal{A}_{\omega_0} = \{(B_1 \cap A_{\omega_0}) \cup (B_2 \setminus A_{\omega_0}) : B_1, B_2 \in \mathfrak{X}'\}$ ist, ist

nach Hilfssatz 3.12

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega_0} : \mathcal{A}_{\omega_0} &\longrightarrow \mathfrak{L} \quad \text{definiert durch} \\ \varphi_{\omega_0}((B_1 \cap A_{\omega_0}) \cup (B_2 \setminus A_{\omega_0})) &= (\varphi'(B_1) \cap C_0) \cup (\varphi'(B_2) \setminus C_0) \end{aligned}$$

mit $B_1, B_2 \in \mathfrak{X}'$ ein Boolescher Homomorphismus mit

$$\varphi_{\omega_0}|_{\mathfrak{X}'} = \varphi', \text{ d.h. } \varphi_{\omega_0}|_{\mathfrak{X}_{\omega}} = \varphi_{\omega}$$

für alle $\omega < \omega_0$.

Also existiert für alle $\omega < \Omega$ ein Boolescher Homomorphismus $\varphi_{\omega} : \mathcal{A}_{\omega} \rightarrow \mathfrak{L}$ mit $\varphi_{\omega}|_{\mathfrak{X}_{\omega'}} = \varphi_{\omega'}$ für $\omega' < \omega$.

Wegen $\bigcup_{\omega < \Omega} \mathcal{A}_{\omega} = \mathcal{A}$ wird deshalb durch

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{L}$$

mit $\tilde{\varphi}(A) = \varphi_{\omega}(A)$ falls $A \in \mathcal{A}_{\omega} (\omega < \Omega)$

ein Boolescher Homomorphismus definiert, für den

$$\tilde{\varphi}|_{\mathfrak{X}} = \varphi$$

gilt.

Teil III: KATEGORIE-MAßRÄUME UND HYPERSTONESISCHE RÄUME
=====

§ 7. Charakterisierung der Maßräume, die sich zu Kategorie-
Maßräumen machen lassen

7. 1 Definition:

Für einen Maßraum $M = (X, \mathcal{A}, \mu)$ sei

$$\mathcal{A}_e := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\},$$

$$\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\},$$

$$\mathcal{A}_1 := \{B \subset X : A \cap B \in \mathcal{A} \text{ für alle } A \in \mathcal{A}_e\},$$

$$\mathcal{N}_1 := \{N \subset X : A \cap N \in \mathcal{N} \text{ für alle } A \in \mathcal{A}_e\}.$$

Die Mengen in $\mathcal{A}_e$ heißen $(\mu-)$ summierbar, die in $\mathcal{N}$
 $(\mu-)$ Nullmengen, die in $\mathcal{A}_1$ lokal $(\mu-)$ meßbar und die
in $\mathcal{N}_1$ lokale $(\mu-)$ Nullmengen.

Im folgenden sei stets $M = (X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

7. 2 Bemerkung:

Wie man leicht nachprüft, ist $\mathcal{A}_1$ eine σ -Unteralgebra
von $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{N}_1$ ein σ -Ideal in $\mathcal{A}_1$.

7. 3 Definition:

$$\tilde{\mu} : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \text{ definiert durch}$$

$$\tilde{\mu}(B) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}_e \text{ und } A \subset B\}$$

heißt das zu μ gehörende wesentliche Maß und

$\tilde{M} := (X, \mathcal{A}_1, \tilde{\mu})$ der zu M gehörende wesentliche Maßraum.

7. 4 Bemerkungen:

(i) $\tilde{\mu}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}_1$, derart daß für alle $A \in \mathcal{A}_1$
genau dann $\mu(A) = 0$ ist, wenn gilt $A \in \mathcal{N}_1$.

(ii) Es gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ und $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1$.

7. 5 Definition:

M heißt wesentlich, wenn $M = \tilde{M}$ ist.

M besitzt ein Lifting (eine obere bzw. untere Dichte), falls ein Lifting (eine obere bzw. untere Dichte) von $\mathcal{A}_1$ bezüglich μ_1 existiert.

Eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}_e \setminus \mathcal{N}$ heißt Zerlegung, falls gilt:

- (i) $Z \cap Z' = \emptyset$ für alle $Z, Z' \in \mathcal{Z}$ mit $Z \neq Z'$.
- (ii) Ist $A \in \mathcal{A}_e$ mit $A \cap Z = \emptyset$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$, so ist $A \in \mathcal{N}$.

7. 6 Bemerkungen:

- (i) Jeder endliche Maßraum ist wesentlich.
- (ii) Ein Maßraum ist genau dann vollständig, wenn der zugehörige wesentliche Maßraum vollständig ist.
- (iii) Für jeden Maßraum M ist der zu M gehörende wesentliche Maßraum $\tilde{M}$ wesentlich.

7. 7 Definition:

Ein Maßraum $M = (X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Kategorie-Maßraum, wenn auf X eine Topologie σ existiert, derart daß die Mengen mit Bairescher Eigenschaft bezüglich σ gerade die Mengen aus $\mathcal{A}$ und die Mengen von 1. Kategorie bezüglich σ gerade die μ -Nullmengen sind.

7. 8 Bemerkung:

Jeder Kategorie-Maßraum ist vollständig.

7. 9 Lemma:

Sei $M = (X, \mathcal{A}, \mu)$ ein wesentlicher Kategorie-Maßraum und σ eine Topologie auf X , derart daß die Mengen mit Bairescher Eigenschaft bezüglich σ genau die Mengen aus $\mathcal{A}$ und die Mengen von 1. Kategorie bezüglich σ genau die μ -Nullmengen sind.

Dann gibt es in (X, σ) eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter offener Mengen von 2. Kategorie, so daß $X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ von 1. Kategorie ist und für alle $i \in I$ gilt:

$$\mu(U_i) < \infty.$$

Beweis:

Sei $\mathcal{T} := \{Z \subset X : \text{Für alle } Z \in \mathcal{T} \text{ ist } 0 < \mu(Z) < \infty \text{ und die Mengen aus } \mathcal{T} \text{ sind paarweise disjunkt.}\}$

Wegen $\emptyset \in \mathcal{T}$ ist $\mathcal{T} \neq \emptyset$, und $\mathcal{T}$ ist durch aufsteigende Inklusion induktiv geordnet.

Nach dem Zornschen Lemma gibt es daher ein maximales Element $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{T}$. Sei $Y := \bigcup_{U \in \mathcal{Z}} U$. Dann ist $X \setminus Y$ eine

offene Menge. - Angenommen es wäre $\mu(X \setminus Y) > 0$. Weil M ein wesentlicher Maßraum ist, würde dann ein $B \in \mathcal{A}_e \setminus \mathcal{M}$ existieren mit $B \subset X \setminus Y$. Nach Wahl der Topologie σ gibt es ein $U \in \mathcal{O}$, so daß $U \cap B$ eine Menge von 1. Kategorie und deshalb eine μ -Nullmenge ist. Sei $U' := U \cap (X \setminus Y)$. Dann ist U' offen und es gilt:

$$\begin{aligned} B \setminus U' &= B \setminus (U \cap X \setminus Y) = B \setminus (U \cap B) = B \setminus U & \text{und} \\ U' \setminus B &\subset U \setminus B, & \text{also} \quad B \cap U' \subset B \cap U. \end{aligned}$$

Daraus folgt $B \cap U' \in \mathcal{M}$.

Also gilt $0 < \mu(U') = \mu(B) < \infty$.

Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{T}$.

Demnach ist $\mu(X \setminus Y) = 0$ und deshalb $X \setminus Y$ von 1. Kategorie.

Die Familie $(U_Z)_{Z \in \mathcal{Z}}$ mit $U_Z = Z$ hat deshalb die im Lemma geforderten Eigenschaften.

7.10 Lemma:

Sei X ein topologischer Raum und U eine offene Teilmenge von X .

- Eine Menge $K \subset U$ ist genau dann von 1. Kategorie bezüglich der Relativtopologie in U , wenn K bezüglich der Topologie in X von 1. Kategorie ist.
- Eine Menge $B \subset U$ hat genau dann die Bairesche Eigenschaft bezüglich der Relativtopologie in U , wenn B bezüglich der Topologie in X die Bairesche Eigenschaft hat.

Beweis:

a) (1) Sei $K \subset U$ bezüglich der Relativtopologie von 1. Kategorie. Dann existiert eine Folge $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in U nirgends dichter Mengen mit $K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$.

Es gilt $\overline{N_k}^U = \overline{N_k} \cap U$ und $\overline{N_k} \subset \overline{N_k} \subset \overline{U}$.
 Wäre $\overline{N_k} \neq \emptyset$, so wäre auch $\emptyset \neq \overline{N_k} \cap U \subset \overline{N_k}^U$.

Da $U \cap \overline{N_k}$ in U offen ist, widerspricht dies der Tatsache, daß N_k in U nirgends dicht ist.

Also ist N_k nirgends dicht in X und deshalb K von 1. Kategorie in X .

(2) Sei $K \subset U$ bezüglich der Topologie in X von 1. Kategorie. Dann gibt es eine Folge $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X nirgends dichter Mengen mit $K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$. Es ist klar, daß N_k auch in U nirgends dicht ist. Also ist K von 1. Kategorie in U .

b) (1) $B \subset U$ habe die Bairesche Eigenschaft bezüglich der Relativtopologie von U . Dann existiert eine in U und daher auch in X offene Menge $V \subset U$, so daß $B \Delta V$ von 1. Kategorie bezüglich der Relativtopologie von U und damit nach a) auch bezüglich der Topologie von X ist.

Demnach hat B die Bairesche Eigenschaft bezüglich der Topologie von X .

(2) $B \subset U$ habe die Bairesche Eigenschaft bezüglich der Topologie von X . Dann gibt es eine in X offene Menge V , so daß $B \Delta V$ von 1. Kategorie in X ist. Nun ist $U \cap V$ offen bezüglich der Relativtopologie von U und es gilt:

$$U \cap (B \Delta V) = B \Delta (U \cap V) \subset B \Delta V.$$

Nach a) ist $B \Delta (U \cap V)$ bezüglich der Relativtopologie in U von 1. Kategorie.

Also hat B die Bairesche Eigenschaft in U .

7.11 Lemma:

Sei X ein topologischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in X , so daß $A := X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ von 1. Kategorie ist.

- Eine Menge $N \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ ist genau dann nirgends dicht in X , wenn für alle $i \in I$ die Menge $N \cap U_i$ bezüglich der Relativtopologie in U_i nirgends dicht ist.
- Eine Menge $K \subset X$ ist genau dann von 1. Kategorie in X , wenn für alle $i \in I$ die Menge $K \cap U_i$ bezüglich der Relativtopologie in U_i von 1. Kategorie ist.
- Eine Menge $B \subset X$ hat genau dann die Bairesche Eigenschaft in X , wenn für alle $i \in I$ die Menge $B \cap U_i$ bezüglich der Relativtopologie in U_i die Bairesche Eigenschaft hat.

Beweis:

- Es ist nur zu zeigen, daß jede Menge $N \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, für die $N \cap U_i$ für alle $i \in I$ bezüglich der Relativtopologie in U_i nirgends dicht ist, selbst in X nirgends dicht ist; denn die Umkehrung ist trivial, weil jede Teilmenge einer nirgends dichten Menge wieder nirgends dicht ist.

Sei also $N \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, so daß $N \cap U_i$ für alle $i \in I$ bezüglich der Relativtopologie in U_i nirgends dicht ist.

Sei $i \in I$. Für jede Umgebung V eines Punktes $x \in \overline{N \cap U_i}$ ist - wegen U_i offen - $U_i \cap V$ eine Umgebung von x und deshalb $V \cap U_i \cap N \neq \emptyset$. Darum ist $x \in \overline{U_i \cap N}$ und damit

$$\overline{N \cap U_i} \subset \overline{U_i \cap N} \cap U_i.$$

Angenommen es wäre $\overline{N \cap U_i} \neq \emptyset$. Dann gäbe es ein $i_0 \in I$ mit $\overline{N \cap U_{i_0}} \neq \emptyset$, was wiederum

$$\emptyset \neq \overline{N \cap U_{i_0}} \subset \overline{N \cap U_{i_0}} \cap U_{i_0} = \overline{N \cap U_{i_0}} \cap U_{i_0}.$$

nach sich züge. Da $\bar{N} \cap U_{i_0}$ offen in U_{i_0} ist, steht dies im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $N \cap U_{i_0}$ in U_{i_0} nirgends dicht ist.

Also ist N nirgends dicht in X .

- b) Es ist nur zu zeigen, daß jede Menge $K \subset X$, für die $K \cap U_i$ für alle $i \in I$ in U_i von 1. Kategorie ist, selbst in X von 1. Kategorie ist; denn die Umkehrung ist auf Grund von Lemma 7.10 trivial.

Sei also $K \subset X$ mit $K \cap U_i$ von 1. Kategorie für alle $i \in I$. Nach Lemma 7.10 ist dann $K \cap U_i$ von 1. Kategorie in X für alle $i \in I$. Für alle $i \in I$ existiert also eine Folge $(N_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ nirgends dichter Mengen mit

$$K \cap U_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{i,n} \quad .$$

Es gilt deshalb

$$K_1 := \bigcup_{i \in I} U_i \cap K = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{i,n} \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{i \in I} N_{i,n} \right) .$$

Angenommen es wäre

$$N_n := \overline{\bigcup_{i \in I} N_{i,n}} \neq \emptyset \quad .$$

Dann gäbe es ein $i_0 \in I$ mit $N_n \cap U_{i_0} \neq \emptyset$.

Andererseits gilt

$$N_n \subset \overline{\bigcup_{i \in I} N_{i,n}} = \overline{N_{i_0,n}} \cup \overline{\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} N_{i,n}} ,$$

d.h. $N_n \setminus \overline{\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} N_{i,n}}$ ist eine in $\overline{N_{i_0,n}}$ enthaltene

offene Menge. Weil $N_{i_0,n}$ nirgends dicht ist, folgt

$$\text{daraus} \quad N_n = \overline{\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} N_{i,n}} \quad .$$

$$\text{Also wäre} \quad U_{i_0} \cap \overline{\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} N_{i,n}} \neq \emptyset$$

und darum, wegen U_{i_0} offen, auch

$$U_{i_0} \cap \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} N_{i,n} \neq \emptyset \quad .$$

Das ergibt einen Widerspruch zu

$$\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} N_{i,n} \subset \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} U_i \subset \{U_{i_0}\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist darum N_n nirgends dicht und somit

$$K_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$$

von 1. Kategorie in X .

Weil $K \setminus K_1 \subset X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = A \cup (\overline{\bigcup_{i \in I} U_i} \setminus \bigcup_{i \in I} U_i)$ ist

und weil der Rand einer offenen Menge nirgends dicht und A von 1. Kategorie ist, ist auch $K \setminus K_1$ von 1. Kategorie und darum $K = (K \setminus K_1) \cup K_1$ von 1. Kategorie in X .

- c) Hier ist wegen Lemma 7.10 nur zu zeigen, daß eine Menge $B \subset X$, für die $B \cap U_i$ für alle $i \in I$ die Baire'sche Eigenschaft hat.

Sei also $B \subset X$ eine Menge, die diese Bedingung erfüllt.

Für $i \in I$ gibt es dann eine o.B.d.A. in U_i enthaltene offene Menge V_i , so daß $(B \cap U_i) \Delta V_i$ von 1. Kategorie ist. Sei $V := \bigcup_{i \in I} V_i$ und $B' := \bigcup_{i \in I} B \cap U_i$.

Dann ist V offen und es gilt:

$$\begin{aligned} V \setminus B &\subset V \setminus B' = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in I} B \cap U_j \right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in I} V_i \setminus (B \cap U_j) \right) \\ &\subset \bigcup_{i \in I} V_i \setminus (B \cap U_i) =: K \end{aligned}$$

Dann ist $K \cap U_i = V_i \setminus (B \cap U_i)$ von 1. Kategorie für alle $i \in I$. Nach Teil b) ist daher K von 1. Kategorie und deshalb auch $V \setminus B$.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} B' \setminus V &= \left(\bigcup_{i \in I} B \cap U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in I} V_j \right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in I} (B \cap U_i) \setminus V_j \right) \\ &\subset \bigcup_{i \in I} (B \cap U_i) \setminus V_i =: K' \end{aligned}$$

Wieder ist für alle $i \in I$ die Menge $K' \cap U_i = B \cap U_i \setminus V_i$ von 1. Kategorie und darum nach Teil b) auch K' .

Dies hat

- wegen $B \setminus V \subset (X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i) \cup (B' \setminus V) \subset A \cup K' \cup (\overline{\bigcup_{i \in I} U_i} \setminus \bigcup_{i \in I} U_i)$ -

zur Folge, daß auch $B \setminus V$ von 1. Kategorie ist.

Also ist $B \triangle V$ von 1. Kategorie und B hat somit die Bairesche Eigenschaft in X .

7.12 Satz: (IONESCU TULCEA [12])

Sei $M = (X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $\pi: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1/\mathcal{M}_1$ die Quotientenabbildung und $\varphi: \mathcal{A}_1/\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$ eine untere Dichte.

Dann ist

$$\tau_\varphi := \{A \in \mathcal{A}_1 : A \subset \varphi(\pi(A))\}$$

eine Topologie auf X mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\tau_\varphi \cap \mathcal{M}_1 = \{\emptyset\}$
- (ii) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann eine lokale μ -Nullmenge, wenn A abgeschlossen und nirgends dicht in (X, τ_φ) ist.

Ist φ ein Lifting, so ist (X, τ_φ) zusätzlich extrem-un-zusammenhängend.

Beweis:

Der Satz wird von IONESCU TULCEA unter der Voraussetzung bewiesen, daß $\mathcal{A}_1/\mathcal{M}_1$ eine vollständige Boolesche Algebra, d.h. M lokalisierbar ist. Andererseits hat KÖLZOW in [14] gezeigt, daß $\mathcal{A}_1/\mathcal{M}_1$ vollständig ist, falls ein Lifting für M existiert. Da M ein vollständiger Maßraum ist, folgt aber nach Korollar 3.6 aus der Existenz einer unteren Dichte stets die Existenz eines Liftings. Die Voraussetzung von IONESCU TULCEA ist also für einen vollständigen Maßraum, der eine untere Dichte besitzt, stets erfüllt.

7.13 Korollar:

Seien M , φ und τ_φ wie in Satz 7.12.

Dann gilt:

- (i) Jede Menge von 1. Kategorie in (X, τ_φ) ist in (X, τ_φ) nirgends dicht und abgeschlossen.
- (ii) Eine Teilmenge $K \subset X$ ist genau dann von 1. Kategorie in (X, τ_φ) , wenn K eine lokale μ -Nullmenge ist.
- (iii) Eine Teilmenge $B \subset X$ hat genau dann die Bairesche Eigenschaft in (X, τ_φ) , wenn B lokal μ -meßbar ist.
- (iv) (X, τ_φ) ist ein Bairescher topologischer Raum.

Beweis:

Das Korollar ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 7.12.

7.14 Korollar:

Jeder vollständige endliche Maßraum ist ein Kategorie-Maßraum.

Beweis:

Da jeder endliche Maßraum wesentlich ist, folgt die Behauptung des Korollars aus Korollar 7.13, wenn man berücksichtigt, daß nach Korollar 4.8 jeder vollständige endliche Maßraum ein Lifting besitzt.

7.15 Satz:

Für einen vollständigen wesentlichen Maßraum $M = (X, \mathcal{A}, \mu)$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i) M besitzt ein Lifting.
- (ii) M besitzt eine obere Dichte.
- (iii) M besitzt eine untere Dichte.
- (iv) M besitzt eine Zerlegung.
- (v) M ist ein Kategorie-Maßraum.

Beweis:

Da $\mathcal{M}_1$ ein Ideal in $\mathcal{P}(X)$ ist, folgt aus Korollar 3.6 die Äquivalenz der Eigenschaften (i) bis (iii).

Es soll nun gezeigt werden, daß jede der Eigenschaften (i), (iv) und (v) sich direkt aus der anderen folgern läßt. Dabei wird als bekannt vorausgesetzt, daß jeder vollständige endliche Maßraum die Eigenschaften (i), (iv) und (v) besitzt.

(i) $\implies$ (v):

Die Tatsache, daß für einen vollständigen wesentlichen Maßraum die Eigenschaft (i) die Eigenschaft (v) impliziert, wurde bereits in Satz 7.12 und Korollar 7.13 (ii) und (iii) formuliert.

(v) $\implies$ (i):

Weil M ein Kategorie-Maßraum ist, existiert eine Topologie σ in X , so daß die Mengen mit Bairescher Eigenschaft bezüglich σ genau die Mengen aus $\mathcal{A}$ und die Mengen von 1. Kategorie bezüglich σ genau die μ -Nullmengen sind. Da M wesentlich ist, gilt: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ und $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$. Wegen $X \notin \mathcal{N}_1$ ist (X, σ) ein topologischer Raum von 2. Kategorie. Nach Korollar 3.10 und Bemerkung 3.11 (ii) (vgl. auch [5]) gibt es ein Bairesches Lifting für (X, σ) . Dieses Lifting ist dann ein Lifting für M .

(iv) $\implies$ (i): (vgl. KÖLZOW [14])

Sei $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}_0 \sim \mathcal{M}$ eine Zerlegung von M .

(1) Behauptung: Genau dann ist eine Teilmenge $A \subset X$

lokal μ -meßbar, wenn für alle $Z \in \mathcal{Z}$ gilt: $A \cap Z \in \mathcal{A}$.

Beweis: Sei $A \subset X$. Es ist nur zu zeigen, daß $A \in \mathcal{A}_1$

ist, falls für alle $Z \in \mathcal{Z}$ gilt: $A \cap Z \in \mathcal{A}$. Die

Umkehrung ist trivial.

Sei $B \in \mathcal{B}_0$. Dann ist $\mathcal{Z}(B) := \{Z \in \mathcal{Z} : Z \cap B \notin \mathcal{M}\}$

höchstens abzählbar und deshalb $B' := \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}(B)} Z \cap B \in \mathcal{A}$.

Außerdem ist $B' \subset B$ und wegen Eigenschaft (ii) in der Definition der Zerlegung $B \setminus B' \in \mathcal{M}$.

Es gilt:

$$A \cap B = (A \cap B') \cup (A \cap B \setminus B') = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}(B)} (Z \cap A \cap B) \cup (A \cap B \setminus B').$$

Für alle $Z \in \mathcal{Z}(B)$ ist nach Voraussetzung $Z \cap B \cap A \in \mathcal{A}$,
also auch $A \cap B' = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}(B)} (Z \cap A \cap B)$.

Weil M vollständig ist, ist außerdem $A \cap B \cap B' \in \mathcal{M}$.
Daraus ergibt sich $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Da $B \in \mathcal{A}_e$ beliebig war, folgt somit $A \in \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

(2) Behauptung: $X \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z \in \mathcal{M}$

Beweis: Nach Behauptung (1) ist $X \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z \in \mathcal{A}$,
weil $(X \setminus \bigcup_{Z' \in \mathcal{Z}} Z') \cap Z = \emptyset \in \mathcal{A}$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$.

Da M wesentlich ist, würde aus $\mu(X \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z) > 0$
folgen, daß ein $A \in \mathcal{A}_e \setminus \mathcal{M}$ existiert mit $A \subset X \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$.
Das steht aber im Widerspruch zur Eigenschaft (ii)
der Zerlegung.

Also ist die Behauptung richtig.

Wegen $X \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z \in \mathcal{M}$ können wir o.B.d.A. annehmen, daß
 $X = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$ ist.

Für $Z \in \mathcal{Z}$ sei nun $\mathcal{A} \cap Z = \{A \in \mathcal{A} : A \subset Z\}$, $\mu_Z = \mu|_{\mathcal{A} \cap Z}$,
 $\mathcal{M}_Z = \{A \in \mathcal{A} \cap Z : \mu_Z(A) = 0\}$ und $\pi_Z: \mathcal{A} \cap Z \rightarrow \mathcal{A} \cap Z / \mathcal{M}_Z$
die Quotientenabbildung.

Dann ist $M_Z := (Z, \mathcal{A} \cap Z, \mu_Z)$ ein vollständiger endlicher
Maßraum. Nach Korollar 4.8 gibt es ein Lifting

$$\varphi_Z: \mathcal{A} \cap Z / \mathcal{M}_Z \rightarrow \mathcal{A} \cap Z$$

Sei $\pi: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1 / \mathcal{M}_1$ die Quotientenabbildung und

$$\varphi: \mathcal{A}_1 / \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ definiert durch}$$

$$\varphi(\pi(A)) = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} \varphi_Z(\pi_Z(A \cap Z))$$

Dann ist φ wohldefiniert; denn für $A, A' \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ mit
 $A \setminus A' \in \mathcal{M} = \mathcal{M}_1$ gilt:

$$A \cap Z \setminus (A' \cap Z) \in \mathcal{M},$$

also

$$\pi_Z(A \cap Z) \subset \pi_Z(A' \cap Z)$$

und damit

$$\varphi_Z(\pi_Z(A \cap Z)) \subset \varphi_Z(\pi_Z(A' \cap Z))$$

für alle $Z \in \mathcal{Z}$.

Also gilt:

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} \varphi_Z(\mathbb{T}_Z(A \cap Z)) \subset \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} \varphi_Z(\mathbb{T}_Z(A' \cap Z))$$

Ist daher zusätzlich $A' \setminus A \in \mathcal{M}$, so ist auch die umgekehrte Inklusion richtig und die Wohldefiniertheit von φ folgt, weil $\varphi(\mathbb{T}(A))$ nach Behauptung (1) aus $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ ist. - Daß φ ein Boolescher Homomorphismus ist, folgt aus der entsprechenden Eigenschaft der φ_Z und weil $\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z = X$ ist.

Sei $A \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. Dann ist

$$A \setminus \varphi(\mathbb{T}(A)) = A \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} \varphi_Z(\mathbb{T}_Z(A \cap Z))$$

Es gilt $(A \setminus \varphi(\mathbb{T}(A))) \cap Z = A \cap Z \setminus \varphi_Z(\mathbb{T}_Z(A \cap Z)) \in \mathcal{M}$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$. Wie im Beweis von Behauptung (2) folgt daher

$$A \setminus \varphi(\mathbb{T}(A)) \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$$

Analog zeigt man

$$\varphi(\mathbb{T}(A)) \setminus A \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$$

Insgesamt folgt so, daß φ ein Lifting für M ist.

(i) $\implies$ (iv): (vgl. KÖLZOW [14])

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas weist man leicht die Existenz eines Systems $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}_e \setminus \mathcal{M}$ nach für das gilt:

- a) $Z \cap Z' \in \mathcal{M}$ für alle $Z, Z' \in \mathcal{Z}^*$ mit $Z \neq Z'$.
- b) Für $A \in \mathcal{A}_e$ ist $A \in \mathcal{M}$ falls $A \cap Z \in \mathcal{M}$ für alle $Z \in \mathcal{Z}^*$ gilt.

Sei nun φ ein Lifting für M und $\mathcal{Z} := \{\varphi(\mathbb{T}(Z)) : Z \in \mathcal{Z}^*\}$. Dann gilt für $Z, Z' \in \mathcal{Z}^*$ mit $Z \neq Z'$ wegen a)

$$0 = \mathbb{T}(Z) \cap \mathbb{T}(Z') = \mathbb{T}(Z \cap Z'),$$

also auch $\varphi(\mathbb{T}(Z)) \cap \varphi(\mathbb{T}(Z')) = \emptyset$.

Ist $A \in \mathcal{A}_e$ mit $A \cap \varphi(\mathbb{T}(Z)) = \emptyset$ für alle $Z \in \mathcal{Z}^*$, so ist

$$A \cap Z = A \cap (Z \setminus \varphi(\mathbb{T}(Z))) \in \mathcal{M}$$

Wegen b) folgt deshalb $A \in \mathcal{M}$.

Insgesamt ist damit nachgewiesen, daß $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von M ist.

(v) $\implies$ (iv):

Da M ein Kategorie-Maßraum ist, gibt es eine Topologie σ in X , derart daß die Mengen mit Bairescher Eigenschaft bezüglich σ genau die Mengen aus $\mathcal{A}$ und die Mengen von 1. Kategorie bezüglich σ genau die μ -Nullmengen sind. Nach Lemma 7.9 existiert eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ in σ von paarweise disjunkten Mengen 2. Kategorie mit $\mu(U_i) < \infty$ und $X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ von 1. Kategorie.

Sei $\mathcal{Z} := \{U_i : i \in I\}$. Dann ist $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}_e \setminus \mathcal{N}$. Sei $A \in \mathcal{A}_e$ mit $A \cap Z = \emptyset$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$. Dann gilt $A \subset X \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$.

Weil $X \setminus \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$ von 1. Kategorie und der Rand jeder offenen Menge nirgends dicht ist, ist A von 1. Kategorie bezüglich σ und deshalb eine μ -Nullmenge.

$\mathcal{Z}$ ist daher eine Zerlegung für M .

(iv) $\implies$ (v):

Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von M . Für $Z \in \mathcal{Z}$ sei $\mathcal{A} \cap Z = \{A \in \mathcal{A} : A \subset Z\}$ und $\mu_Z = \mu|_{\mathcal{A} \cap Z}$. Dann ist $M_Z := (Z, \mathcal{A} \cap Z, \mu_Z)$ ein vollständiger endlicher Maßraum. Nach Korollar 7.14 gibt es eine Topologie σ_Z in Z , derart daß die Mengen mit Bairescher Eigenschaft bezüglich σ_Z genau die Mengen aus $\mathcal{A} \cap Z$ und die Mengen von 1. Kategorie bezüglich σ_Z genau die μ_Z -Nullmengen sind.

Sei $\sigma := \{\emptyset, X\} \cup \{U \subset \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z : U \cap Z \in \sigma_Z \text{ für alle } Z \in \mathcal{Z}\}$.

Dann ist σ eine Topologie in X .

Aus Behauptung (1) in "(iv) $\implies$ (i)" folgt $\sigma \cap \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

Sei $K \subset X$ von 1. Kategorie bezüglich σ . Da für jedes $Z \in \mathcal{Z}$ σ in Z die Topologie σ_Z induziert, ist nach Lemma 7.10 $K \cap Z$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$ von 1. Kategorie in (Z, σ_Z) , d.h. $K \cap Z \in \mathcal{N}$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$. Daraus folgt wegen $\mathcal{Z}$ Zerlegung- $K \in \mathcal{N}$.

Demnach liegt jede Menge von 1. Kategorie bezüglich σ in $\mathcal{N}$ und jede Menge mit Bairescher Eigenschaft bezüglich σ in $\mathcal{A}$.

Sei $N \in \mathcal{M}$. Dann ist für alle $Z \in \mathcal{Z}$ die Menge $N \cap Z$ von 1. Kategorie in (Z, σ_Z) . Außerdem ist $X = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$.

Nach Lemma 7.11 ist daher N von 1. Kategorie bezüglich σ .

Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $A \cap Z \in \mathcal{A} \cap Z$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$, also hat $A \cap Z$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$ die Bairesche Eigenschaft bezüglich (Z, σ_Z) . Wieder aus Lemma 7.11 folgt, daß A die Bairesche Eigenschaft bezüglich σ hat.

Insgesamt ist damit gezeigt, daß $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Kategorie-Maßraum ist.

7.16 Bemerkung:

Die Äquivalenz von (i) und (iv) wird von KÖLZOW [14] bewiesen. Die Generalvoraussetzung von [14], daß die auftretenden Maßräume gleich ihrer Carathéodory-Vervollständigung sind, ist für vollständige wesentliche Maßräume stets erfüllt.

Die Tatsache, daß aus (i) die Eigenschaft (v) folgt, wird - wenn auch nicht explizit formuliert - zum Beispiel von IONESCU TULCEA [12] und OXToby [18] bewiesen. Daß auch die Umkehrung richtig ist, wurde vom Verfasser in [5] gezeigt.

Neu ist deshalb im obigen Beweis nur, daß sich (iv) und (v) direkt jeweils aus der anderen Aussage ableiten lassen, ohne für den Maßraum ein Lifting zu konstruieren.

Eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 7.12 ist das folgende Korollar:

7.17 Korollar:

Ein vollständiger Maßraum besitzt genau dann ein Lifting, wenn der zugehörige wesentliche Maßraum ein Kategorie-Maßraum ist.

§ 8. Charakterisierung der topologischen Räume,
die ein Kategoriemaß zulassen

Im folgenden sei stets X ein topologischer Raum.

Mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X)$ werde die Topologie, mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$ die $\mathcal{G}$ -Algebra der Mengen mit Bairescher Eigenschaft und mit $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1(X)$ das $\mathcal{G}$ -Ideal der Mengen 1. Kategorie in X bezeichnet.

Ist $Y \subset X$ und ist von dem topologischen Raum Y die Rede, so wird darunter stets Y versehen mit der von X induzierten Relativtopologie verstanden.

Schließlich sei zu Beginn des Paragraphen noch an den Categoriesatz von BANACH erinnert, der zum Beispiel von OXToby [18] bewiesen wird und der hier ohne Beweis zitiert werden soll:

8. 1 Satz: (Categoriesatz von BANACH)

In einem topologischen Raum ist die Vereinigung von offenen Mengen 1. Kategorie wieder von 1. Kategorie.

8. 2 Korollar:

Sei $S := \bigcup_{K \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{O}} K$. Dann ist $\bar{S}$ von 1. Kategorie und für

jede offene Teilmenge $U \subset X$ ist $U \setminus \bar{S}$ ein Bairescher topologischer Raum.

Beweis:

$\bar{S} \setminus S$ ist als Rand einer offenen Menge nirgends dicht.

Da nach dem Categoriesatz von BANACH S von 1. Kategorie ist, gilt daher dasselbe für $\bar{S} = S \cup (\bar{S} \setminus S)$.

Sei nun U eine offene Teilmenge von X und V eine offene Teilmenge des topologischen Raumes $U \setminus \bar{S}$. Dann ist V offen in X . Ist V in $U \setminus \bar{S}$ von 1. Kategorie, so ist nach Lemma 7.10 V auch von 1. Kategorie in X . Diese beiden Tatsachen haben $V \subset S \subset \bar{S}$ und deshalb $V = \emptyset$ zur Folge. Also ist $U \setminus \bar{S}$ ein Bairescher topologischer Raum.

8.3 Definition:

Ein Maß $\mu: \mathcal{L} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ heißt Kategoriemaß für X , falls für alle $B \in \mathcal{L}$ genau dann $\mu(B) = 0$ gilt, wenn $B \in \mathcal{E}_1$ ist.

Ein Kategoriemaß μ für X heißt wesentlich (bzw. endlich), wenn $(X, \mathcal{L}, \mu)$ ein wesentlicher (bzw. endlicher) Maßraum ist.

Ein Kategoriemaß $\mu: \mathcal{L} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ heißt trivial, wenn μ nur die Werte 0 und ∞ annimmt, sonst nicht-trivial.

Existiert ein (wesentliches, endliches, triviales oder nicht-triviales) Kategoriemaß für X , so sagt man auch "X läßt ein (entsprechendes) Kategoriemaß zu" oder "X besitzt ein (entsprechendes) Kategoriemaß".

8.4 Bemerkung:

Jeder topologische Raum X läßt ein (eindeutig bestimmtes) triviales Kategoriemaß zu, nämlich

$$\mu: \mathcal{L} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \quad \text{definiert durch}$$

$$\mu(B) = \begin{cases} \infty, & B \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{E}_1 \\ 0, & B \in \mathcal{E}_1 \end{cases}$$

Interessant sind also nur die Fälle, in denen ein nicht-triviales Kategoriemaß für X existiert.

8.5 Satz:

Genau dann läßt ein topologischer Raum X ein nicht-triviales Kategoriemaß zu, wenn eine offene Teilmenge $U \subset X$ von 2. Kategorie existiert, so daß U ein Bairescher Raum ist, der ein endliches Kategoriemaß zuläßt.

Beweis:

(1) Sei $\mu: \mathcal{L} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ ein nicht-triviales Kategoriemaß.

Dann gibt es ein $B \in \mathcal{L}$ mit $0 < \mu(B) < \infty$. Zu B existiert eine offene Menge U' mit $U' \Delta B \in \mathcal{E}_1$. Sei $S := \bigcup_{K \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{O}} K$.

Nach Korollar 8.2 ist dann $U := U' \setminus \bar{S}$ ein Bairescher topologischer Raum, und es gilt $U \triangle B \in \mathcal{K}_1$.

Nach Lemma 7.10 ist $\mathcal{K}(U) = \{B \in \mathcal{K} : B \subset U\}$. Sei

$\nu := \mu|_{\mathcal{K}(U)}$. Aus 7.10 folgt dann, daß ν ein Kategoriemaß für U ist, für das gilt: $\nu(U) = \mu(U) = \mu(B)$, also $0 < \nu(U) < \infty$.

Da μ Kategoriemaß für X ist, hat $0 < \mu(U)$ zur Folge, daß U von 2. Kategorie ist.

- (2) Es gebe eine offene Menge $U \subset X$ von 2. Kategorie, so daß U ein Bairescher Raum ist und ein endliches Kategoriemaß $\nu : \mathcal{K}(U) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ existiert.

Sei $\mu : \mathcal{K} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ definiert durch

$$\mu(B) = \begin{cases} \infty & , B \setminus U \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_1 \\ \nu(B \cap U), B \setminus U \in \mathcal{K}_1 \end{cases} .$$

Dann ist μ ein wohldefiniertes Maß auf $\mathcal{K}$.

Für $B \in \mathcal{K}_1$ ist $B \setminus U \in \mathcal{K}_1$ und $B \cap U \in \mathcal{K}_1(U) = \{K \in \mathcal{K}_1 : K \subset U\}$, also $\mu(B) = \nu(B \cap U) = 0$.

Ist $B \in \mathcal{K}$ mit $\mu(B) = 0$, so ist notwendigerweise $B \setminus U \in \mathcal{K}_1$ und $\nu(B \cap U) = 0$, also $B \cap U \in \mathcal{K}_1(U) \subset \mathcal{K}_1$ und damit

$$B = (B \setminus U) \cup (B \cap U) \in \mathcal{K}_1 .$$

Also ist μ ein Kategoriemaß.

Weil U von 2. Kategorie ist, ist $0 < \nu(U)$.

Demnach gilt auch

$$0 < \mu(U) = \nu(U) < \infty ,$$

und die Behauptung des Satzes folgt.

8.6 Satz:

Genau dann läßt ein topologischer Raum X ein wesentliches Kategoriemaß zu, wenn in X eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter offener Mengen von 2. Kategorie mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i) $X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}$ ist von 1. Kategorie.
- (ii) Für jedes $i \in I$ ist U_i ein Bairescher topologischer Raum, der ein endliches Kategoriemaß μ_i zuläßt.

Beweis:

(1) Sei $\mu: \mathfrak{L} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ ein wesentliches Kategoriemaß.

Nach Lemma 7.9 gibt es eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter offener Mengen von 2. Kategorie mit $X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{U_i} \in \mathfrak{L}_1$ und $\mu(U_i) < \infty$. Sei $S := \bigcup_{K \in \mathfrak{L}_1 \cap \sigma} K$.

Nach Korollar 8.2 ist dann der offene Unterraum $U_i := U_i \setminus \bar{S}$ für alle $i \in I$ ein Bairescher topologischer Raum mit $\mu(U_i) = \mu(U_i) < \infty$.

Nach Lemma 7.10 ist deshalb $\mu_i := \mu|_{\mathfrak{L}(U_i)}$ ein endliches Kategoriemaß.

Es gilt:

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{U_i} &\subset (X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} (U_i \setminus \bar{S}) = (X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i) \cup \bar{S} \\ &\subset (X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}) \cup (\bigcup_{i \in I} \overline{U_i} \setminus \bigcup_{i \in I} U_i) \cup \bar{S}. \end{aligned}$$

Weil $\bar{S} \in \mathfrak{L}_1$, $X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{U_i} \in \mathfrak{L}_1$ und der Rand einer offenen Menge nirgends dicht ist, gilt also

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{U_i} \in \mathfrak{L}_1.$$

(2) Es gebe in X eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter offener Mengen von 2. Kategorie mit den Eigenschaften (i) und (ii).

Sei $\mu: \mathfrak{L} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ definiert durch

$$\mu(B) = \sum_{i \in I} \mu_i(B \cap U_i) \quad (B \in \mathfrak{L}).$$

Dann ist μ ein Maß auf $\mathfrak{L}$.

a) Behauptung: μ ist wesentlich.

Beweis: Zum Beweis von Behauptung a) ist nur zu zeigen, daß für $B \in \mathfrak{L}$ mit $\mu(B) = \infty$ gilt:

$$\mu(B) \leq \sup \{ \mu(S) : S \in \mathfrak{L}, S \subset B \text{ und } \mu(S) < \infty \}.$$

Sei also $B \in \mathfrak{L}$ mit $\mu(B) = \infty$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge $J(n) \subset I$ mit

$$\sum_{j \in J(n)} \mu_j(B \cap U_j) > n.$$

Sei $S_n := \bigcup_{j \in J(n)} (B \cap U_j)$. Dann ist $S_n \in \mathfrak{L}$, $S_n \subset B$

$$\text{und } \mu(S_n) = \sum_{j \in J(n)} \mu_j(B \cap U_j) < \infty.$$

Außerdem ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(S_n) = \infty$, woraus folgt:

$$\mu(B) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n) \leq \sup\{\mu(S) : S \in \mathfrak{L}_e, S \subset B\}.$$

Damit ist Behauptung a) bewiesen.

b) Behauptung: μ ist ein Kategoriemaß.

Beweis:

$\alpha)$ Sei $B \in \mathfrak{L}$ mit $\mu(B) = 0$. Dann ist $\mu_i(B \cap U_i) = 0$ für alle $i \in I$, also $B \cap U_i \in \mathfrak{L}_1$ für alle $i \in I$.

Nach Lemma 7.11 folgt daraus $B \in \mathfrak{L}_1$.

$\beta)$ Sei $B \in \mathfrak{L}_1$. Dann ist nach Lemma 7.10 $B \cap U_i \in \mathfrak{L}_1(U_i)$, also $\mu_i(B \cap U_i) = 0$ für alle $i \in I$. Das hat aber $\mu(B) = 0$ zur Folge.

Aus $\alpha)$ und $\beta)$ folgt Behauptung b).

8. 7 Bemerkung:

Die vorangehenden Überlegungen reduzieren das Problem der Charakterisierung derjenigen topologischen Räume, die ein nicht-triviales bzw. wesentliches Kategoriemaß zulassen, auf das der Charakterisierung der Baireschen topologischen Räume, die ein endliches Kategoriemaß zulassen.

Für einen topologischen Raum X bezeichne $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(X)$ das System der regulär-offenen Mengen in X , d.h. $\mathfrak{R}(X) = \{\overset{\circ}{U} : U \text{ offen in } X\}$. Für $R, R' \in \mathfrak{R}$ sei $R \cup^{\mathfrak{R}} R' := \overset{\circ}{R \cup R'}$, $\overset{\mathfrak{R}}{R} := \overset{\circ}{R}$, $R \cap^{\mathfrak{R}} R' := R \cap R'$ und $R \subset^{\mathfrak{R}} R' \iff R \subset R'$. $\mathfrak{R}$ versehen mit diesen Operationen ist eine vollständige Boolesche Algebra (vgl. HALMOS [8], Seite 13). Natürlich gilt $\mathfrak{R}(X) \subset \mathfrak{O}(X) \subset \mathfrak{L}(X)$.

8. 8 Satz: (vgl. OXToby [18], [19])

Sei X ein Bairescher topologischer Raum und $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{E}_1$ die Quotientenabbildung.

Dann ist $\pi|_{\mathcal{R}}$ ein Boolescher Isomorphismus von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}/\mathcal{E}_1$.

Der einfache Beweis soll hier nicht durchgeführt werden.

Das folgende Korollar ergibt sich sofort aus Satz 8.8:

8. 9 Korollar: (vgl. OXToby [18], HALMOS [8])

Ein Bairescher topologischer Raum X besitzt genau dann ein endliches Kategoriemaß, wenn auf $\mathcal{R}(X)$ (bzw. $\mathcal{L}(X)/\mathcal{E}_1(X)$) ein strikt positives endliches Maß existiert.

8.10 Bemerkung:

Ein topologischer Raum X heißt quasi-regulär, wenn zu jeder nicht-leeren offenen Menge $U \subset X$ eine nicht-leere offene Menge $V \subset X$ mit $\bar{V} \subset U$ existiert.

OXToby konstruiert in [19] alle quasi-regulären Baireschen topologischen Räume X , für die $\mathcal{R}(X)$ zu einer vorgegebenen Booleschen σ -Algebra mit strikt positivem Maß isomorph ist. Diese Konstruktion ermöglicht es jedoch i.a. nicht, bei einem vorgegebenen quasi-regulären Baireschen Raum auf Grund seiner topologischen Eigenschaften zu erkennen, ob er ein endliches Kategoriemaß zuläßt oder nicht.

Für metrisierbare Räume ist dies jedoch - wie OXToby zeigt - möglich. Es gilt der folgende Satz:

8.11 Satz: (OXToby [19])

Ein metrisierbarer topologischer Raum X läßt genau dann ein endliches Kategoriemaß zu, wenn die Menge der isolierten Punkte von X höchstens abzählbar ist und in X dicht liegt.

Auf den Beweis dieses Satzes soll hier verzichtet werden; jedoch wird im folgenden ein analoges Resultat für Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis der Topologie abgeleitet. Als wichtiges Hilfsmittel dazu wird ein Satz von HORN-TARSKI [1] über die Nicht-Existenz von Maßen für Boolesche Algebren verwendet.

8.12 Definition:

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra.

$A \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ heißt Atom von $\mathcal{A}$, wenn für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ entweder $B = 0$ oder $B = A$ ist.

$\mathcal{A}$ heißt atomar, wenn die Menge der Atome in $\mathcal{A}$ dicht ist.

$\mathcal{A}$ heißt atomfrei, wenn es in $\mathcal{A}$ kein Atom gibt.

$\mathcal{A}$ erfüllt die abzählbare Kettenbedingung, wenn jede Familie paarweise disjunkter Elemente aus $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ höchstens abzählbar ist.

8.13 Satz: (HORN - TARSKI [1])

Auf einer separablen, atomfreien Booleschen σ -Algebra verschwindet jedes endliche Maß identisch.

Beweis: vgl. etwa [1] oder [5].

8.14 Korollar:

Eine separable Boolesche σ -Algebra $\mathcal{A}$ besitzt genau dann ein strikt positives, endliches Maß, wenn $\mathcal{A}$ atomar ist.

Beweis:

- (1) Sei $\mathcal{A}$ eine atomare, separable σ -Algebra. Dann ist $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : A \text{ Atom in } \mathcal{A}\}$ eine dichte Teilmenge von $\mathcal{A}$. Sei $\mathcal{D}'$ eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{A}$. Für jedes $A \in \mathcal{D}$ gibt es dann ein $D_A \in \mathcal{D}' \setminus \{0\}$ mit $D_A \subset A$. Nach Definition des Atoms gilt aber wegen $D_A \neq 0$ stets $D_A = A$. $\mathcal{D}$ ist demnach eine Teilmenge von $\mathcal{D}'$, also auch höchstens abzählbar.

Sei $(\alpha_D)_{D \in \mathcal{D}}$ eine Familie in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $\sum_{D \in \mathcal{D}} \alpha_D < \infty$.

Dann ist $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\mu(A) = \sum_{D \in \mathcal{A}} \alpha_D$$

ein strikt positives, endliches Maß auf $\mathcal{A}$.

- (2) Sei $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ein strikt positives endliches Maß. Angenommen $\mathcal{A}$ wäre nicht atomar. Dann gäbe es ein $A \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, so daß für alle Atome D von $\mathcal{A}$ gilt $D \not\subset A$ und deshalb $D \cap A = 0$. Daher ist $\mathcal{A}_A := \{B \in \mathcal{A}: B \subset A\}$ mit den induzierten Operationen eine separable, atomfreie Boolesche σ -Algebra und somit - nach Satz 8.13 - $\mu|_{\mathcal{A}_A} = 0$. Weil μ strikt positiv ist, folgt hieraus $A = 0$ im Widerspruch zur Wahl von $A \neq 0$.

8.15 Lemma:

Sei X ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie.

Dann ist die Boolesche σ -Algebra $\mathcal{R}(X)$ der regulär-offenen Mengen von X separabel.

Beweis:

Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X , $\mathcal{D} = \{\bar{U}: U \in \mathcal{B}\}$ und $\mathcal{R} \in \mathcal{R}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Dann existiert ein $U \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ mit $U \subset \mathcal{R}$. Weil $\mathcal{R} = \bar{\bar{\mathcal{R}}}$ ist, gilt

$$\emptyset \neq \bar{U} \subset \mathcal{R}$$

Also ist $\mathcal{D}$ eine dichte Teilmenge von $\mathcal{R}$.

8.16 Korollar:

Ein Bairescher topologischer Raum X mit abzählbarer Basis der Topologie besitzt genau dann ein endliches Kategorieß, wenn $\mathcal{R}(X)$ atomar ist.

Beweis:

Das Korollar ist eine direkte Folgerung aus Korollar 8.9, dem vorangehenden Lemma 8.15 und Korollar 8.14.

8.17 Satz:

Sei X ein Hausdorff-Raum.

Genau dann ist $\mathcal{R}(X)$ atomar, wenn die Menge der isolierten Punkte von X in X dicht liegt.

Beweis:

- (1) Sei $\mathcal{R}(X)$ atomar und U eine nicht-leere offene Menge in X . Dann gibt es ein Atom $A \in \mathcal{R}(X)$ mit $A \subset \overline{U}$.

Angenommen es gäbe $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Weil X Hausdorffsch ist, existieren offene Mengen V und W mit $x \in V$, $y \in W$ und $V \cap W = \emptyset$. Deshalb ist $A \setminus \overline{W \cap A}$ eine nicht-leere offene Menge und deshalb

$$y \in W \cap A \subset \overline{W \cap A} \subsetneq \overline{A} = A$$

im Widerspruch zur Wahl von A als Atom.

Also ist A einelementig, d.h. es gibt einen isolierten Punkt $z \in X$ mit $A = \{z\}$.

Weil A offen ist, folgt aus $A \subset \overline{U} \subset \overline{U}$ auch $A \cap U \neq \emptyset$, also $z \in U$.

Die Menge der isolierten Punkte von X liegt also dicht in X .

- (2) Die Menge der isolierten Punkte von X liege dicht in X . Sei $R \in \mathcal{R} \setminus \{\emptyset\}$. Dann existiert ein isolierter Punkt $x \in R$. Also gilt $\{x\} = \overline{\{x\}} \subset R$ und $\{x\}$ ist natürlich ein Atom in $\mathcal{R}$.

8.18 Satz:

Ein Bairescher Hausdorff-Raum X mit abzählbarer Basis der Topologie läßt genau dann ein endliches Kategorismaß zu, wenn die Menge der isolierten Punkte von X in X dicht liegt.

Beweis:

Der Satz folgt unmittelbar aus Korollar 8.16 und dem vorangehenden Satz 8.17.

Die bisher angestellten Überlegungen zeigen, daß diejenigen Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis der Topologie, die ein endliches Kategoriemaß zulassen, in hohem Grad pathologisch sind. Der folgende Satz von GAPAILLARD [3] zeigt, daß die Pathologie von der Forderung der σ -Additivität für Kategoriemaße herrührt. Es gilt nämlich:

8.19 Satz: (GAPAILLARD [3])

Jeder separable Bairesche Raum läßt ein endlich-additives, endliches Kategoriemaß zu.

Endlich-additive Kategoriemaße sind dabei völlig analog zu Kategoriemaßen definiert.

Der einfache Beweis des Satzes soll hier nicht ausgeführt werden.

Wie schon im Fall der Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis der Topologie, so bildet auch im Fall beliebiger topologischer Räume ein Satz aus der Theorie der Booleschen Algebren die Grundlage für die Untersuchungen der Existenz von endlichen Kategoriemaßen. Es handelt sich um einen Satz von KELLEY [13] über die Existenz von strikt positiven Maßen auf Booleschen Algebren, der im folgenden formuliert werden soll.

8.20 Definition:

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche Algebra.

Ist $\mathcal{V}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{A}$, so sei

$$d(\mathcal{V}) := \begin{cases} \frac{1}{\text{card}(\mathcal{V})} \max \{ \text{card}(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \text{ und } \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \neq \emptyset \}, & \text{falls } \mathcal{V} \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } \mathcal{V} = \emptyset. \end{cases}$$

Ist $\mathcal{T}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{A}$, so sei

$$d(\mathcal{T}) := \inf \{ d(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \subset \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{V} \text{ endlich} \}.$$

$d(\mathcal{T})$ heißt die Durchschnittszahl von $\mathcal{T}$.

8.21 Bemerkung:

Es ist klar, daß die beiden obigen Definitionen für endliche Mengen übereinstimmen.

Ist $\mathcal{A}$ eine Unterálgebra von $\mathcal{P}(X)$ für eine Menge X , so gilt für $\forall \mathcal{A}$:

$$d(\mathcal{T}) = \inf \left\{ \sup_{x \in X} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{A_i}(x) : m \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{T} \right\}.$$

8.22 Satz: (KELLEY [13])

Sei $\mathcal{A}$ eine Boolesche Álgebra.

Auf $\mathcal{A}$ existiert genau dann ein strikt positives, endlich-additives, endliches Maß, wenn eine Folge $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i) $\mathcal{A} \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$
- (ii) $d(\mathcal{T}_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Überträgt man diesen Satz auf endlich-additive, endliche Kategoriemaße, so ergibt sich das folgende Lemma:

8.23 Lemma:

Sei X ein Bairescher topologischer Raum.

Genau dann besitzt X ein endliches, endlich-additives Kategoriemaß, wenn für die Topologie $\mathcal{O}$ von X gilt:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Folge } (\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{O} \text{ mit} \\ \text{(i) } \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n \quad \text{und} \\ \text{(ii) } d(\mathcal{T}_n) > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Beweis:

Wie im Falle σ -additiver Maße folgt aus Satz 8.8 sofort, daß für X genau dann ein endliches, endlich-additives Kategoriemaß existiert, wenn auf $\mathcal{R}(X)$ ein strikt positives, endliches, endlich-additives Maß existiert.

- (1) Sei $\mu: \mathcal{R}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ein endliches, endlich-additives, strikt positives Maß. Nach Satz 8.22 gibt es eine Folge $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}(X)$ mit

$$\mathcal{R}(X) \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$$

und $d(\mathcal{R}_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\mathcal{T}_n := \{U \in \mathcal{O}: \bar{U} \in \mathcal{R}_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Dann gilt natürlich $\mathcal{O} \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$.

Für jede endliche Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}$ gilt:

$$d(\mathcal{T}) = d(\{\bar{U}: U \in \mathcal{T}\});$$

denn für $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$ ist genau dann $T_1 \cap \dots \cap T_m \neq \emptyset$, wenn $\frac{\bar{}}{T_1} \dots \frac{\bar{}}{T_m} \neq \emptyset$ ist.

Also gilt $d(\mathcal{T}_n) = d(\mathcal{R}_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (2) Sei nun $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von $\mathcal{O}$ mit

$$\mathcal{O} \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n \quad \text{und} \quad d(\mathcal{T}_n) > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\mathcal{R}_n := \{\bar{U}: U \in \mathcal{T}_n\}$.

Wie oben zeigt man leicht $\mathcal{R}(X) \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ und

$$d(\mathcal{R}_n) = d(\mathcal{T}_n) > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 8.22 existiert daher ein endliches, endlich-additives, strikt positives Maß auf $\mathcal{R}(X)$.

8.24 Definition:

Eine Boolesche Algebra $\mathcal{A}$ heißt schwach-abzählbar-distributiv, wenn für jede Familie $(A_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ in $\mathcal{A}$ mit

$$A_{i,j+1} \subset A_{i,j} \quad \text{für alle } (i,j) \in \mathbb{N}^2,$$

für die $B_i := \bigcap_{j \in \mathbb{N}}^{\mathcal{A}} A_{i,j}$ existiert, auch

$$A := \bigcap_{i \in \mathbb{N}}^{\mathcal{A}} \left(\bigcup_{f \in \mathbb{N}}^{\mathcal{A}} A_{i,f(i)} \right)$$

existiert und außerdem gilt:

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}}^{\mathcal{A}} B_i.$$

8.25 Satz: (KELLEY [13])

Auf einer Booleschen σ -Algebra $\mathcal{A}$ existiert genau dann ein strikt positives endliches Maß, wenn $\mathcal{A}$ folgende Eigenschaften hat:

- (i) $\mathcal{A}$ ist vollständig.
- (ii) $\mathcal{A}$ ist schwach-abzählbar-distributiv.
- (iii) $\mathcal{A}$ besitzt ein strikt positives, endliches, endlich-additives Maß.
- (iv) $\mathcal{A}$ erfüllt die abzählbare Kettenbedingung.

8.26 Bemerkung:

Da die Bedingungen (i) und (iii) die Bedingung (iv) im obigen Satz implizieren, kann Bedingung (iv) weggelassen werden:

Sei nämlich $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ mit $A_i \cap A_j = 0$ falls $i \neq j$ und $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Sei μ ein endliches, endlich-additives Maß auf $\mathcal{A}$. Für eine endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt dann

$$\sum_{j \in J} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \mu(A) < \infty.$$

Also konvergiert $\sum_{i \in I} \mu(A_i)$. Wegen $\mu(A_i) > 0$ für alle $i \in I$ folgt hieraus, daß I höchstens abzählbar ist.

8.27 Korollar:

Genau dann läßt ein Bairescher topologischer Raum X ein endliches Kategoriemaß zu, wenn gilt:

- (i) $\mathcal{R}(X)$ ist schwach-abzählbar-distributiv.
- (ii) $\mathcal{O}(X)$ erfüllt Bedingung (*).

Beweis:

- (1) Es existiere ein endliches Kategoriemaß für X . Dann gibt es nach Korollar 8.9 ein strikt positives endliches Maß auf $\mathcal{R}(X)$ und gemäß Satz 8.25 ist daher $\mathcal{R}(X)$ schwach-abzählbar-distributiv. Außerdem folgt nach Lemma 8.23, daß $\mathcal{O}(X)$ die Bedingung (*) erfüllt.

- (2) Seien nun (i) und (ii) für X erfüllt. Aus (ii) folgt nach Lemma 8.23, daß für X ein endlich-additives, endliches Kategoriemaß existiert. Aus Satz 8.8 ergibt sich dann, daß auf $\mathcal{R}(X)$ ein strikt positives, endlich-additives, endliches Maß existiert. Weil $\mathcal{R}(X)$ vollständig und nach Voraussetzung (i) schwach-abzählbar-distributiv ist, folgt aus Satz 8.25 und Bemerkung 8.26, daß auf $\mathcal{R}(X)$ ein strikt positives endliches Maß existiert. Nach Korollar 8.9 läßt daher X ein endliches Kategoriemaß zu.

8.28 Bemerkungen:

- (i) Wie GAPAILLARD [3] zeigt (vgl. Satz 8.19), besitzt jeder separable Bairesche Raum (also insbesondere jeder Bairesche Raum mit abzählbarer Basis der Topologie) ein endliches, endlich-additives Kategoriemaß, erfüllt also Bedingung (*). Andererseits wurde in Korollar 8.16 gezeigt, daß ein Bairescher topologischer Raum X mit abzählbarer Basis der Topologie genau dann ein ($\mathcal{G}$ -additives) Kategoriemaß besitzt, wenn $\mathcal{R}(X)$ atomar ist. Als Folgerung ergibt sich hieraus:
Für einen Baireschen Raum X mit abzählbarer Basis der Topologie ist $\mathcal{R}(X)$ genau dann schwach-abzählbar-distributiv, wenn $\mathcal{R}(X)$ atomar ist.
- (ii) Soweit dem Verfasser bekannt ist, gelang es bisher nicht, diejenigen Baireschen Räume X zu charakterisieren, für die $\mathcal{R}(X)$ schwach-abzählbar-distributiv ist.
Für lokal-kompakte Räume gilt jedoch folgender Satz, den OXToby - wenn auch nicht explizit in dieser Formulierung - in [19] beweist.

8.29 Satz:

(OXTOBY [19])

Sei X ein lokal-kompakter Raum, der die abzählbare Kettenbedingung erfüllt.

Genau dann ist $\mathcal{R}(X)$ schwach-abzählbar-distributiv, wenn in X jede Menge von 1. Kategorie nirgends dicht ist.

Der Beweis wird hier nicht ausgeführt. Es sei aber daran erinnert, daß ein topologischer Raum genau dann die abzählbare Kettenbedingung erfüllt, wenn jede Familie paarweise disjunkter, nicht-leerer, offener Mengen in X höchstens abzählbar ist.

8.30 Korollar:

Ein lokal-kompakter Raum X läßt genau dann ein endliches Kategoriemaß zu, wenn gilt:

- (i) In X ist jede Menge von 1. Kategorie nirgends dicht.
- (ii) $\mathcal{O}(X)$ erfüllt die Bedingung (*).

Beweis:

- (1) Es existiere ein endliches Kategoriemaß für X .

Da jeder lokal-kompakte Raum Bairesch ist, folgt aus Korollar 8.27, daß $\mathcal{O}(X)$ Bedingung (*) erfüllt und $\mathcal{R}(X)$ schwach-abzählbar-distributiv ist. Weil $\mathcal{O}(X)$ die Bedingung (*) erfüllt, gibt es eine Folge $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}(\mathcal{O}(X))$ mit $\mathcal{O}(X) \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ und $d(\mathcal{T}_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie paarweise disjunkter, nicht-leerer, offener Mengen in X .

Angenommen I wäre überabzählbar. Dann würde ein $n \in \mathbb{N}$ existieren, so daß $I(n) := \{i \in I : U_i \in \mathcal{T}_n\}$ überabzählbar ist, d.h. aber für alle $m \in \mathbb{N}$ würden

$S_1, \dots, S_m \in \mathcal{T}_n$ existieren mit $S_i \cap S_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, also $S_1 \cap \dots \cap S_m = \emptyset$. Für $\mathcal{T} = \{S_1, \dots, S_m\}$ folgt daraus $d(\mathcal{T}) = 1/m$. Also hat die Annahme im Widerspruch zur Wahl von $\mathcal{T}_n$ zur Folge, daß $d(\mathcal{T}_n) = 0$ ist.

X erfüllt demnach die abzählbare Kettenbedingung und aus Satz 8.29 ergibt sich, daß X die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt.

- (2) Sei umgekehrt X ein lokal-kompakter Raum, der die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Wie unter (1) zeigt man, daß X der abzählbaren Kettenbedingung genügt. Nach Satz 8.29 folgt dann aus (i), daß $\mathcal{R}(X)$ schwach-abzählbar-distributiv ist.

Weil X als lokal-kompakter Raum Bairesch ist, ergibt sich aus Korollar 8.27, daß für X ein endliches Kategoriemaß existiert.

Zum Schluß dieses Paragraphen soll noch eine Charakterisierung der maßtheoretischen Liftingtopologien vorgenommen werden.

8.31 Bemerkung:

In einem Baireschen Raum X ist jede abgeschlossene Menge von 1. Kategorie nirgends dicht.

Beweis:

Sei $K \subset X$ abgeschlossen und von 1. Kategorie. Wäre $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, so würde wegen $\overset{\circ}{K} \subset K$ eine nicht-leere offene Menge von 1. Kategorie existieren. Das steht im Widerspruch dazu, daß X Bairesch ist.

8.32 Definition:

Sei X eine Menge.

Eine Topologie σ in X heiße maßtheoretische Liftingtopologie, wenn ein vollständiger Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und ein Lifting $\varphi: \mathcal{A}_1/\mu_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ existiert, so daß

$$\sigma = \tau_\varphi = \{A \in \mathcal{A}_1: \varphi(\pi(A)) \supset A\}$$

ist, wobei $\pi: \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1/\mu_1$ die Quotientenabbildung ist.

8.33 Satz:

Eine Topologie σ in einer Menge X ist genau dann eine maßtheoretische Liftingtopologie, wenn (X, σ) ein extrem-unzusammenhängender Bairescher Raum ist, der ein wesentliches Kategoriemaß zuläßt und in dem jede Menge von 1. Kategorie abgeschlossen (also insbesondere nirgends dicht) ist.

Beweis:

- (1) Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und φ ein Lifting für diesen Maßraum. Dann ist das zu μ gehörende wesentliche Maß $\tilde{\mu}$ ein wesentliches Kategoriemaß für (X, τ_φ) . Nach Satz 7.12 und Korollar 7.13 hat (X, τ_φ) auch die übrigen im Satz geforderten Eigenschaften.
- (2) Sei umgekehrt X ein extrem-unzusammenhängender Bairescher Raum, der ein wesentliches Kategoriemaß zuläßt und in dem jede Menge von 1. Kategorie abgeschlossen ist.

Sei $\mu: \mathfrak{L}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ein wesentliches Kategoriemaß. Da $(X, \mathfrak{L}(X), \mu)$ ein wesentlicher Maßraum ist, gilt $\mathfrak{L}(X) = (\mathfrak{L}(X))_1$ und die lokalen μ -Nullmengen sind genau die μ -Nullmengen, also die Mengen von 1. Kategorie. Sei $\pi: \mathfrak{L}(X) \longrightarrow \mathfrak{L}(X)/\mathfrak{N}_1(X)$ die Quotientenabbildung. Nach Bemerkung 3.9 (ii) ist $\pi|_{\mathfrak{L}(X)}$ injektiv und $\varphi := (\pi|_{\mathfrak{L}(X)})^{-1}$ ein α -Homomorphismus.

Seien $B, B' \in \mathfrak{L}(X)$. Weil X extrem-unzusammenhängend ist, gilt dann:

$$\begin{aligned} \varphi(\pi(B) \cup \pi(B')) &= \overline{\varphi(\pi(B)) \cup \varphi(\pi(B'))} = \overline{\varphi(\pi(B)) \cup \varphi(\pi(B'))} \\ &= \overline{\varphi(\pi(B))} \cup \overline{\varphi(\pi(B'))} \\ &= \overline{\varphi(\pi(B))} \cup \overline{\varphi(\pi(B'))} \\ &= \varphi(\pi(B)) \cup \varphi(\pi(B')) \end{aligned}$$

Also ist φ ein Lifting für den Maßraum $(X, \mathfrak{L}(X), \mu)$.

Behauptung: $\mathcal{O} = \{B \in \mathcal{L}(X) : B \subset \varphi(\mathcal{T}(B))\} =: \tau_\varphi$

Beweis:

a) Sei $U \in \mathcal{O}$. Dann ist $U \subset \overline{U} = \varphi(\mathcal{T}(U))$, also $U \in \tau_\varphi$.

b) Sei $B \in \tau_\varphi$. Dann ist $\varphi(\mathcal{T}(B)) \setminus B \in \mathcal{L}_1(X)$ nach Voraussetzung abgeschlossen bezüglich $\mathcal{O}$.

Also ist wegen $\varphi(\mathcal{T}(B)) \in \mathcal{O}$ auch

$$B = \varphi(\mathcal{T}(B)) \setminus (\varphi(\mathcal{T}(B)) \setminus B) \in \mathcal{O}.$$

§ 9. Eine topologische Charakterisierung der hyperstoneschen Räume

9. 1 Definition:

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ die σ -Algebra der Borelmengen von X .

Ein Maß $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ heißt ein Borelmaß auf X .

Ein Borelmaß μ auf X heißt regulär, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ gilt:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U): U \text{ offen in } X \text{ und } A \subset U\}.$$

Ein Borelmaß μ auf X heißt normal, wenn μ auf allen abgeschlossenen, nirgends dichten Mengen in X verschwindet.

Als Träger eines Borelmaßes μ auf X wird die abgeschlossene Menge

$$\text{supp}(\mu) := \bigcap_{U \in \mathcal{T}} U \text{ mit}$$

$$\mathcal{T} := \{U \in \mathcal{B}(X): \mu(U) = 0\} \text{ bezeichnet.}$$

Ein kompakter Raum X heißt hyperstonesch, wenn X folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) X ist extrem-unzusammenhängend.
- (ii) Die Vereinigung der Träger der endlichen normalen regulären Borelmaße liegt dicht in X .

9. 2 Bemerkung:

Es ist eine bekannte Tatsache, daß ein kompakter Raum X genau dann extrem-unzusammenhängend ist, wenn die Menge $\mathcal{C}(X)$ der stetigen reellen Funktionen auf X (bezüglich der kanonischen Ordnung) ein bedingt vollständiger Verband ist.

DIXMIER [2] nennt ein positives Radonmaß $\mu: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ normal, wenn für jede beschränkte, aufsteigend filtrierende Familie $(f_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{C}(X)$ gilt:

$$\left(\sup_{i \in I} \mu(f_i)\right) = \sup_{i \in I} \mu(f_i),$$

und einen extrem-unzusammenhängenden kompakten Raum X hyperstonesch, wenn die Vereinigung der Träger der normalen Radonmaße in X dicht liegt.

Diese Definition des hyperstoneschen Raumes ist zu der hier gegebenen äquivalent; denn nach einem Satz von RIESZ besteht für einen kompakten Raum X eine bijektive Beziehung zwischen den regulären endlichen Borelmaßen (im oben definierten Sinn) und den positiven Radonmaßen; außerdem ist ein positives Radonmaß genau dann normal im Sinn von DIXMIER [2], wenn das zugehörige reguläre Borelmaß auf den nirgends dichten, abgeschlossenen Mengen verschwindet (vgl. DIXMIER [2], Seite 7, Proposition 1).

Das folgende Lemma wird zum Beispiel von OXToby in [19] formuliert. Der einfache Beweis soll hier nicht ausgeführt werden.

9. 3 Lemma: (OXToby [19])

Sei μ ein endliches normales Borelmaß auf einem topologischen Raum X , so daß für jede offene Menge $U \subset X$ von 2. Kategorie gilt: $\mu(U) > 0$.

Dann ist die Vervollständigung von μ ein endliches Kategoriemaß.

Auch das nächste Lemma stammt aus OXToby [19] und soll hier nicht bewiesen werden.

9. 4 Lemma: (OXToby [19])

Sei X ein topologischer Raum, so daß für jede nicht-leere offene Menge U in X eine nicht-leere offene Menge $V \subset X$ mit $\bar{V} \subset U$ existiert.

Dann ist jedes endliche Kategoriemaß auf X die Vervollständigung eines regulären Borelmaßes auf X .

9.5 Korollar:

Sei X ein extrem-unzusammenhängender kompakter Raum, U eine offene Teilmenge von X , ν ein endliches Kategoriemaß für U und $\mathcal{B}$ die σ -Algebra der Borelmengen von X . Dann wird durch $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\mu(B) = \nu(B \cap U)$ ($B \in \mathcal{B}$) ein endliches normales reguläres Borelmaß auf X mit $\text{supp}(\mu) = \bar{U}$ definiert.

Beweis:

Es ist klar, daß μ wohldefiniert und ein Maß ist.

Sei $N \subset X$ nirgends dicht und abgeschlossen. Dann ist $N \cap U$ in U von 1. Kategorie (vgl. Lemma 7. 10). Deshalb gilt

$$0 = \nu(N \cap U) = \mu(N)$$

Also ist μ normal.

Sei $A \subset X$ abgeschlossen und $\varepsilon > 0$.

Wie man sich leicht überlegt, wird durch $\nu': \mathcal{L}(\bar{U}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\nu'(B') = \nu(B' \cap U)$ ($B' \in \mathcal{L}(\bar{U})$) ein endliches Kategoriemaß auf $\bar{U}$ definiert und es gilt natürlich für alle $B \in \mathcal{B}$:

$$\mu(B) = \nu(B \cap U) = \nu'(B \cap \bar{U}).$$

Da $A \cap \bar{U}$ abgeschlossen in $\bar{U}$ ist, gibt es nach Lemma 9.4 eine in $\bar{U}$ offene Menge V mit $A \cap \bar{U} \subset V$ und

$$\nu'(A \cap \bar{U}) + \varepsilon > \nu'(V)$$

Sei $W := V \cup \bar{U}$. Da X extrem-unzusammenhängend ist, ist $\bar{U}$ offen und darum W eine offene Menge in X mit $A \subset W$.

Außerdem gilt:

$$\mu(W) = \mu(\bar{U}) + \mu(V) = \nu'(V),$$

$$\text{also} \quad \mu(A) + \varepsilon > \mu(W).$$

Demnach ist μ regulär.

Sei $V \subset X$ offen mit $\mu(V) = 0$. Dann ist $\nu(V \cap U) = 0$, also $V \cap U$ eine offene Menge von 1. Kategorie. Da jeder lokal-kompakte Raum Bairesch ist, folgt daraus $V \cap U = \emptyset$ und damit $V \subset \bar{U}$.

$$\text{Außerdem ist} \quad \mu(\bar{U}) = \nu(U \cap \bar{U}) = 0.$$

Also ist $\bar{U}$ der Träger von μ .

Insgesamt folgt so - wegen $\mu(X) = \nu(U) < \infty$ - die Behauptung des Korollars.

Der folgende Satz wird - wenn auch nicht in dieser Formulierung - im wesentlichen schon von DIXMIER [2] bewiesen.

9. 6 Satz: (DIXMIER [2])

Ein extrem-unzusammenhängender kompakter Raum ist genau dann hyperstonesch, wenn er ein wesentliches Kategoriemaß zuläßt.

Beweis:

- (1) Sei X ein hyperstonescher Raum. Nach DIXMIER [2] (Seite 11, Lemme 2) gibt es eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter, offener und o.B.d.A. nicht-leerer Mengen in X mit $X = \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$ und eine Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ endlicher normaler regulärer Borelmaße mit $\text{supp}(\mu_i) = U_i$ für alle $i \in I$. Sei $i \in I$. Dann kann μ_i als reguläres Borelmaß auf U_i aufgefaßt werden. Da μ_i normal ist, verschwindet μ_i auf allen abgeschlossenen, nirgends dichten Mengen in U_i . Weil U_i der Träger von μ_i ist, gilt für jede offene Menge $V \subset U_i$ $\mu_i(V) > 0$. Nach Lemma 9.3 ist die Vervollständigung von μ_i deshalb ein endliches Kategoriemaß auf U_i . Aus Satz 8.6 folgt daher - weil jede offene Teilmenge eines kompakten Raumes Bairesch ist -, daß für X ein wesentliches Kategoriemaß existiert.
- (2) Sei X ein extrem-unzusammenhängender kompakter Raum, der ein wesentliches Kategoriemaß zuläßt. Nach Satz 8.6 gibt es eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter offener Mengen von 2. Kategorie in X mit $X \setminus \overline{\bigcup_{i \in I} U_i} \in \mathfrak{K}_1(X)$, so daß auf U_i für jedes $i \in I$ ein endliches Kategoriemaß ν_i existiert. Weil X kompakt und damit Bairesch ist, hat $X \setminus \overline{\bigcup_{i \in I} U_i} \in \mathfrak{K}_1(X)$ zur Folge, daß $X = \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$ gilt.

Nach Korollar 9.5 gibt es für jedes $i \in I$ ein endliches, normales, reguläres Borelmaß μ_i mit $\overline{U_i}$ als Träger.

Aus $\bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}$ folgt $\overline{\bigcup_{i \in I} U_i} = X$.

Also liegt erst recht die Vereinigung der Träger aller endlichen, normalen, regulären Borelmaße in X dicht; das heißt aber, daß X hyperstonesch ist.

9. 7 Satz:

Ein kompakter Raum X ist genau dann hyperstonesch, wenn gilt:

- (i) X ist extrem-unzusammenhängend.
- (ii) Jede Menge von 1. Kategorie in X ist nirgends dicht.
- (iii) In X existiert eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter, nicht-leerer, offener Mengen mit folgenden Eigenschaften:

(a) $X = \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$

- (b) $\sigma(U_i)$ erfüllt für alle $i \in I$ die Bedingung (*) aus Lemma 8.23.

Beweis:

- (1) Sei X hyperstonesch. Dann ist X extrem-unzusammenhängend und nach Satz 9.6 gibt es ein wesentliches Kategoriemaß für X . Gemäß Satz 8.6 existiert daher in X eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkter, nicht-leerer offener Mengen, so daß gilt:

$$X \setminus \overline{\bigcup_{i \in I} U_i} \in \mathfrak{K}_1(X)$$

und es auf U_i für alle $i \in I$ ein endliches Kategoriemaß gibt. Weil X kompakt und deshalb Bairesch ist, folgt aus $X \setminus \overline{\bigcup_{i \in I} U_i} \in \mathfrak{K}_1(X)$ sofort $X = \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$.

Da für $i \in I$ auf U_i ein endliches Kategoriemaß existiert und U_i als offen Teilmenge eines kompakten Raumes lokal-kompakt ist, ergibt sich aus Korollar 8.30, daß $\sigma(U_i)$ die Bedingung (*) erfüllt und

in U_i jede Menge von 1. Kategorie nirgends dicht ist. Sei nun $K \subset X$ eine Menge von 1. Kategorie. Dann ist für alle $i \in I$ die Menge $U_i \cap K$ nirgends dicht. Nach Lemma 7.11 ist dann K nirgends dicht in X .

Also erfüllt X die Bedingungen (i) bis (iii).

- (2) Erfülle nun umgekehrt X die Bedingungen (i) bis (iii) und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie paarweise disjunkter, nicht-leerer offener Teilmengen in X mit den Eigenschaften (a) und (b). Da wegen (ii) für alle $i \in I$ in U_i jede Menge von 1. Kategorie nirgends dicht ist, existiert nach Korollar 8.30 auf U_i ein endliches Kategoriemaß. Aus Satz 8.6 folgt dann die Existenz eines wesentlichen Kategoriemaßes für X .

9. 8 Bemerkung:

Die Bedeutung der hyperstoneschen Räume liegt darin, daß sie mit den Spektren der kommutativen W^* -Algebren mit Einselement identisch sind (vgl. DIXMIER [2] und SAKAI [20]). Unter W^* -Algebren sind dabei Algebren von Operatoren eines Hilbertraumes zu verstehen, die bezüglich der "schwachen" Topologie und der Adjungiertenbildung abgeschlossen sind. Die kommutativen W^* -Algebren mit Einselement sind auch dadurch charakterisiert, daß sie bis auf Isomorphie gerade die $L^\infty(\mu)$ für lokalisierbare Maße μ sind (vgl. SAKAI [20]).

Eine topologische Charakterisierung der hyperstoneschen Räume war anscheinend bisher nicht bekannt. Die oben gegebene topologische Charakterisierung ist noch ziemlich unbefriedigend, weil in ihr die KELLEYsche Bedingung (*) aus Lemma 8.23 auftaucht, deren topologischer Inhalt unklar bleibt.

Anhang: Dualisierungen stetiger Korrespondenzen zwischen kompakten Räumen

Ähnlich wie sich in der Stoneschen Dualitätstheorie jeder stetigen Abbildung von einem Booleschen Raum X in einen Booleschen Raum Y genau ein Boolescher Homomorphismus von $\mathcal{A}(Y)$ nach $\mathcal{A}(X)$ zuordnen läßt, entspricht bekanntlich jeder stetigen Abbildung von einem kompakten Raum X in einen kompakten Raum Y genau ein Algebra-Homomorphismus von $\mathcal{C}(Y)$ nach $\mathcal{C}(X)$, wobei $\mathcal{C}(X)$ bzw. $\mathcal{C}(Y)$ die Algebra der stetigen reellen Funktionen auf X bzw. Y bezeichnet, und umgekehrt.

Nach den Überlegungen in § 1 dieser Arbeit liegt die Frage nah, ob eine bijektive Beziehung zwischen der Menge aller stetigen, punktabgeschlossenen Korrespondenzen von einem kompakten Raum X in einen kompakten Raum Y und einer gewissen Menge von Abbildungen von $\mathcal{C}(Y)$ nach $\mathcal{C}(X)$ besteht.

Die Frage läßt sich positiv beantworten, und man erhält folgendes - zu Satz 1.18 analoge - Ergebnis:

Es seien X und Y kompakte Räume.

Ist $F: X \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ eine stetige Korrespondenz, so ist

$$F^*: \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$$

mit $F^*(f)(x) = \sup f(F(x)) \quad (x \in X, f \in \mathcal{C}(Y))$
eine wohldefinierte Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $F^*(\sup(f, g)) = \sup(F^*(f), F^*(g))$ für alle $f, g \in \mathcal{C}(Y)$,
- (ii) $F^*(\alpha 1) = \alpha 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,
- (iii) $F^*(\alpha f) = \alpha F^*(f)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathcal{C}(Y)$,
- (iv) $F^*(f + g) \leq F^*(f) + F^*(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}(Y)$.

Umgekehrt wird für jede Abbildung $\varphi: \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ mit den Eigenschaften (i) bis (iv) durch

$$\varphi^*(x) := \bigcap_{f \in \mathcal{C}(Y)} \{f \mid f \leq \varphi(f)(x)\} \quad (x \in X)$$

eine stetige, punktabgeschlossene Korrespondenz φ^* von X nach Y definiert.

Es gilt: $(F^*)^* = F$ und $(\varphi^*)^* = \varphi$.

Wie im Fall der Booleschen Korrespondenzen, so gibt es auch für stetige, punktabgeschlossene Korrespondenzen zwischen kompakten Räumen noch eine zweite Möglichkeit der Dualisierung. Es gilt nämlich für kompakte Räume X und Y :

Ist $F: X \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ eine stetige Korrespondenz, so ist

$$F_*: \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$$

mit $F_*(f)(x) = \inf f(F(x))$ ($x \in X, f \in \mathcal{C}(Y)$)

eine wohldefinierte Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i') $F_*(\inf(f, g)) = \inf(F_*(f), F_*(g))$ für alle $f, g \in \mathcal{C}(Y)$,

(ii') $F_*(\alpha 1) = \alpha 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,

(iii') $F_*(\alpha f) = \alpha F_*(f)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+, f \in \mathcal{C}(Y)$,

(iv') $F_*(f + g) \geq F_*(f) + F_*(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}(Y)$.

Umgekehrt wird für jede Abbildung $\varphi: \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ mit den Eigenschaften (i') bis (iv') durch

$$\varphi_*(x) := \bigcap_{f \in \mathcal{C}(Y)} \{f \geq \varphi(f)(x)\} \quad (x \in X)$$

eine stetige, punktabgeschlossene Korrespondenz φ_* von X nach Y definiert.

Es gilt: $(F_*)_* = F$ und $(\varphi_*)_* = \varphi$.

Die vorangehenden Überlegungen deuten an, daß man einen Teil der Resultate dieser Arbeit auf diese Art der Dualisierung von stetigen Korrespondenzen zwischen kompakten Räumen übertragen kann. - Auf eine Formulierung der Ergebnisse, die man auf diese Weise erhält, soll jedoch an dieser Stelle verzichtet werden.

Literaturverzeichnis:

- [1] H. BAUER Wahrscheinlichkeitstheorie und Grund-
züge der Maßtheorie
de Gruyter, Berlin 1968
- [2] J. DIXMIER Sur certains espaces considérés par
M.H. Stone
Summa Brasil. Math. 2, fasc. 11 (1951),
151 - 182
- [3] J. GAPAILLARD Relèvements, Bases de dérivation
ensemblistes et fonctionnelles
These, Nantes 1972
- [4] A. M. GLEASON Projective Topological Spaces
Ill. J. Math. 2 (1958), 482 - 489
- [5] S. GRAF Lifting- und Fortsetzungsprobleme,
insbesondere Hüllenkonstruktionen
Diplomarbeit, Erlangen 1972
- [6] P. R. HALMOS Algebraic Logic
Chelsea Publishing Company, New York 1962
- [7] " " " Injective and Projective Boolean
Algebras
Proc. Sympos. Pure Math. II (1961),
114 - 122
- [8] " " " Lectures on Boolean Algebras
van Nostrand Company, Princeton/
New Jersey 1963

- | | | |
|------|--|---|
| [9] | G. HANSEL | Théorème de relèvement et mesures
bivalentes
Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. VIII,
n ^o 4 (1972), 395-401 |
| [10] | M. HASUMI | The Extension Property of Complex
Banach Spaces
Tôhoku Math. J. (2) 10 (1958), 135-142 |
| [11] | A. HORN -
A. TARSKI | Measures in Boolean Algebras
Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948),
467-497 |
| [12] | A. IONESCU TULCEA -
C. IONESCU TULCEA | Topics in the Theory of Lifting
Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/
New York 1969 |
| [13] | J. L. KELLEY | Measures in Boolean Algebras
Pacific J. Math. 9 (1959), 1165-1177 |
| [14] | D. KÖLZOW | Differentiation von Maßen
Lecture Notes in Mathematics, Bd. 65(1968) |
| [15] | D. MAHARAM | An Algebraic Characterization of
Measure Algebras
Ann. Math. 48 (1947), 154 - 167 |
| [16] | E. MICHAEL | Selected Selection Theorems
Amer. Math. Monthly 63 (1956), 233-238 |
| [17] | J. VON NEUMANN -
M. H. STONE | The Determination of Representative
Elements in the Residual Classes of
a Boolean Algebra
Fund. Math. 25 (1935), 353 - 376 |

- [18] J. C. OXTOBY Measure and Category
Springer Verlag, New York/Heidelberg/
Berlin 1970
- [19] " " " Spaces that Admit a Category Measure
J. Reine Angew. Math. 205 (1961), 156-170
- [20] SH. SAKAI C^* -Algebras and W^* -Algebras
Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/
New York 1971
- [21] R. SIKORSKI Boolean Algebras
Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/
New York 1964
- [22] " " A Theorem on Extension of Homomorphisms
Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), 332-335
- [23] F. B. WRIGHT Some Remarks on Boolean Duality
Port. Math. 16,4 (1957), 109 - 117

Lebenslauf

Am 16.2.1949 wurde ich als Sohn des Landwirts Adolf Graf und seiner Ehefrau Maria, geb. Mühlinghaus, in Wuppertal-Elberfeld geboren.

Von Ostern 1955 an besuchte ich die Volksschule in Herzkamp, unserem Wohnort. Zu Ostern 1959 wechselte ich zur Städtischen Realschule für Jungen in Wuppertal-Barmen über, die ich im März 1965 mit dem Abschlußzeugnis verließ. Anschließend trat ich in die Obersekunda des Gymnasiums Sedanstraße in Wuppertal-Barmen ein. Hier bestand ich im Juli 1967 die Reifeprüfung.

Vom Wintersemester 1967/68 bis zum Sommersemester 1972 studierte ich an der Universität Erlangen-Nürnberg Mathematik. Während dieser Zeit besuchte ich Vorlesungen der Professoren H. Bauer, K. Jacobs, D. Kölzow, G. Nöbeling, W. Specht u.a. Im Juli 1972 legte ich dann die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Seit dem 1. Oktober 1972 bin ich Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten beim Fachbereich Mathematik der Universität Regensburg und gleichzeitig Doktorand bei Herrn Professor D. Kölzow in Erlangen.

Regensburg, September 1973

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990